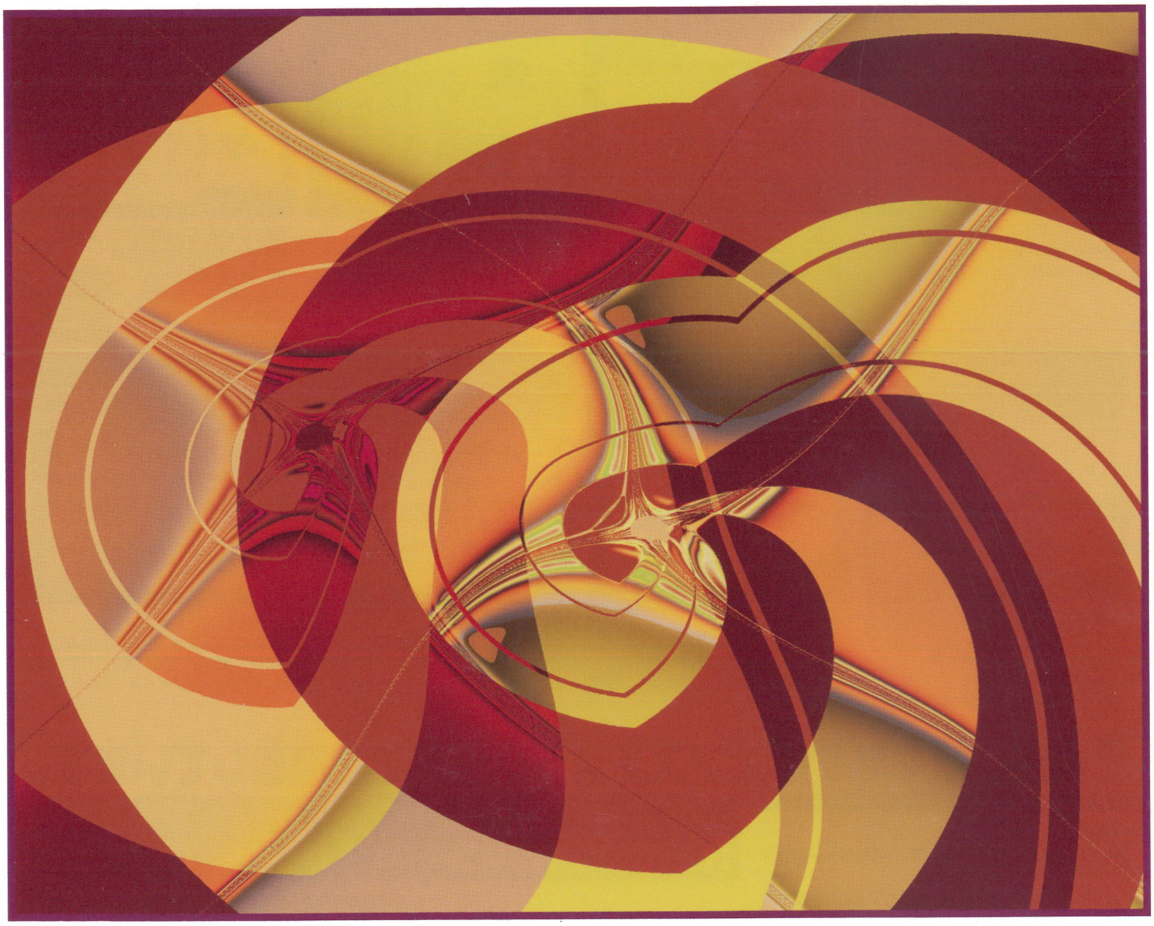
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年5月1日発行　第47巻5号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

数理科学

5
2009

特集　微積分を楽しむ
数理を見る目，語る言葉



No.551

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-68：for Senior & Graduate Courses）

量子力学の考え方

物理で読み解く量子情報の基礎

根本　香絵　著

本体 1829 円　　送料 290 円　　表示価格は税抜きです

物理学科で学んでいる，あるいは学んだ方々以外の方々，特に情報系の学部学生あたりを念頭に置いて，物理的な意味が感じ取れるように量子力学の基礎を解説．数理・情報系などの学際領域から学ぶ必要に迫られた読者に，本質を見失わないようにガイドすることに努めた一冊．

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 551 May 2009

微積分を楽しむ

数理を見る目，語る言葉

表紙：戸川　隼人

数理科学特集一覧

63 年/7～2006 年/8 省略
2006 年/9　ランダムネス
/10　ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11　固有値問題のひろがり
/12　素粒子像の探究
2007 年/1　ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2　ランダム行列の広がり
/3　現代物理における超対称性
/4　現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5　数学の直観的理解
/6　物理における位相の世界
/7　代数的物理観
/8　数学における場の量子論
/9　ディラック
/10　フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1　現象を視る
/2　ゲージ重力対応
/3　現代物理のための数学キーワード
/4　現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり
/5　物理と数学の難所
/6　線形代数の力
/7　物理的思考法のすすめ
/8　数の魅力
/9　トポロジカルな弦の世界
/10　ポアンカレ
別冊　対称性と保存則
/11　物理と論理
/12　確率論的物理観
2009 年/1　グラフィックでわかる物理
/2　発展する量子力学
/3　方程式に潜む対称性
/4　現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊　代数学の魅力

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11　コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12　計算神経科学への招待
08 年/1　演習 くり込み群
08 年/3　熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5　重力理論講義
08 年/6　代数幾何入門講義
08 年/7　ネットワーク科学への招待
08 年/9　物理のためのリー群とリー代数
08 年/11　量子暗号理論の展開
09 年/1　量子力学の考え方

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
書泉ブックタワー(秋葉原)
三省堂本店(神田)
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店(池袋)
ジュンク堂書店(新宿)
芳林堂(高田馬場)
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
ブックファースト青葉台店(横浜)
栄松堂ジョイナス店(横浜)
有隣堂イセザキ町店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
文教堂ブックセンター(川崎)
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
旭屋本店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂書店(京都)
ジュンク堂書店(神戸)
ジュンク堂三宮駅前店(神戸)
ジュンク堂書店(大分)
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂書店(仙台)
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

MATHEMATICAL SCIENCES

May 2009 Number 551

特集／微積分を楽しむ

微積分の力を身につけるには

河東 泰之

1. はじめに

言うまでもなく，微積分学はあらゆる数学の基礎であり，世界中の高校，大学などで教えられている．本号は，大学で学ぶ微積分のポイント，他の自然科学や経済学での使われ方についての特集である．

日本では高校数学でそれなりのレベルの微積分を教えており，理科系の大学新入生は基本的な微積分を学んだ上で大学に入ってくる．経済学部等でも入試に数学を課していれば，多項式の微積分程度は高校で学んでいる．学力低下でろくに身についていないという意見もあるが，とりあえず，これだけの数学を高校で学んでいるということは立派なことである．アメリカでは一流大学でも，全く微積分を学んだことのない大学新入生はごくありふれた存在である．理系では数学は受験の際の中心科目であるので，かなりの時間をかけて高校で微積分を学んだ学生も多いはずである．その上大学での微積分は何を学ぶのであろうか．

まず誰が見ても明らかな違いは，関数の変数の数が増えることである．高校では，変数 x の関数 $f(x)$ を学んだが，大学では変数 x, y の関数 $f(x, y)$ や，さらにもっと変数の多い関数，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を扱う．極値を求めたり，面積，体積を求めたりするのが，高校微積分の中心テーマだったが，大学でも，同様の問題を複数の変数を持つ関数について考えることになる．微積分とは変化する量を扱う学問であり，実用的な状況を考えれば，理工学でも経済学でも変数がたくさんあるのはごく普通の当然の状況である．現実世界の量が一つのパラメータにしか依存しないほうが例外であろう．これについては平地先生の記事で解説していただいた．大学1年生の数学の講義ではこれらの話題にいきなり入ることもあるが，一変数の話題に時間を費やすケースもよくある．どちらであっても，物理や化学の講義では，複数の変数を持つ関数の微積分を最初から使うことが多いので注意が必要である．カリキュラムの組み方があまりよくないと思うが，物理や化学のほうからすれば，数学で教えるのを待っていては間に合わないということであろう．

このように変数が多い場合について新しく学ばなくてはいけないことは明らかだが，一変数の関数についても高校で学んだことだけでは理論上も応用上も不十分である．

応用上不足している一番の点は，テイラー展開，すなわち関数を整級数で近似する方法である．もともと微分というのは，関数を1次式で近似する手法である．さらに精度を上げて，2次式，3次式などで近似することができる．実用上は，たいていの関数をこのように無限級数，あるいはそれを途中で切った多項式で近似することが多いので，これを学ぶことはあらゆる応用で必要である．また理論的な立場からも，高校以来よく知っている，

$\sin x$, e^x などがきれいな式の無限級数で表されるということは驚異的な事実である．またこれによって，全く別々の関数と思っていた，指数関数と三角関数が本質的に同一の関数であることも明らかになる．さらに，「自然」対数やラジアンがなぜ自然なものかも本当に明らかになるのはテイラー展開を学ぶことによってである．

さて，今理論的な立場と言ったが，微積分を厳密な理論的立場から展開する一連の理論がある．基本的な論法の名前から，しばしば，ϵ–δ 論法と呼ばれるものである．高校では直感的に明らかとされていた，極限や連続性の概念を基礎に立ち戻って，一から議論するものである．伝統的に多くの理工系の数学で１年生から教えられていたが，難しすぎる，応用上重要でないといった声に押されて，どんどん教えている大学が減ってきているようである．しかし，数学やそれに近い理論科学において，必須の基本的な論法であることに変わりはなく，そのような分野に進む人は必ず越えなければならない関門である．これについては，金子先生に解説を書いていただいた．金子先生の記事にもあるように，情報科学科でも，むしろ難しい微積分の計算より論理的な側面のほうが重要であることも多いようである．実際の計算はどんどんコンピュータがやるようになっており．三角関数の入った複雑な積分計算が手でできなくてはいけない状況というのはまず考えられない．しかし，コンピュータを扱うのには，様々な論理的な構造がきちんとわかっていなくてはいけないことはよくあるのである．入学試験を採点したり，大学で教えていたりしても，こういった論理が非常に弱い学生がたくさんいる．計算問題だと相当面倒なものでも，根性で頑張って，しかもちゃんとできる人はかなりいるのだが，論理的なことになると途端に怪しくなり，背理法で何か証明しようとするときに，結論の否定命題を正しく書けないという人は驚くほど多い．それは，何か勉強の方向が間違っているように思う．

さて，微積分は，その発祥以来様々な応用と密接に結びついて発展してきた．大学生も数学科で微積分を使う人より，理工系で微積分を将来実用的に使う人のほうがずっと多い．それらの諸科学との関係についても．いろいろ詳しい記事を書いていただいている．物理学，工学との関係が深いことは誰でも知っているであろう．もっとも高校の微積分では，そういう結びつきを極力表に出さないような変な教え方をしているのだが．これらの結びつきのうち，力学との関係について，岩井先生に，工学との関係については吉野先生に超関数の話を書いていただいた．

それほど誰でも知っているというわけでもないかもしれないが，ファイナンスへの応用と，その基礎となる確率論についても．中川先生，乙部先生に書いていただいた．数理ファイナンスは最近の金融危機でも大きなスポットライトが当たってしまったが，もちろん，数学をより正しく使うことがこれからの道であり．数学を使わない時代に戻ることはできない．この方面ではむしろ工学より高度の数学を応用している場合がしばしばある．

確率論は，そのファイナンスへの応用の基礎であり，またその他の諸科学への応用の基礎でもある．世の中には，きっちり未来を見通せる話はあまりなく，確率的にしか見通せない話のほうがずっと多いことは誰が見ても明らかであろう．高校までの，確率は，さいころを振ったり，カードを抜いたりする話が大半で，場合の数を正しく数えることが基本である．そのため，微積分と関係しているという気があまりしないかもしれないが，世の中の現象が連続的にランダムに変動している様子を数学的にきちんと扱うのには，微積分が必要である．現代確率論は，積分の理論が基礎になっており，そこで確率微分方程式と呼ばれるものを扱うことになる．

その他，より進んだ話題として，ファインマンの経路積分と呼ばれる方法が，現代理論物理学で基本的な手法になっている．これは通常の積分よりかなり「高級」な話題だが，基本的な考え方は積分の延長上にあるので，前野先生に解説していただいた．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

力学と微積分

微積分はどう使われているか



岩井 敏洋

1. はじめに

ガリレオが望遠鏡で天体観測をしてから 400 年後の本年は世界天文年ということである．本稿のタイトルの力学に関して，ガリレオの果たした役割は大きいが，ここでは触れないで，単に彼の名前を冠した概念をあげるにとどめる．ニュートンの力学の第一法則の要請する空間（その中で物体が運動する空間）を慣性系またはガリレオ系という．ガリレオ・ニュートンの系譜の史的意義は，例えば佐藤文隆先生[1)]によれば，次のように説明される．「ガリレオは，例えば，運動を問題にする場合にその原因，理由，目的などを「なぜ？」と問うのを無意味とした．問題は「いかに？」起こるかである．伝統的学問からのこの態度変更を，ニュートンは「私は仮定は作らない」という消極的な形で表現した．「プリンキピア」の影響を「方法」と呼んでいる理由である．いずれにせよ，この方法が“通俗化”するには，ガリレオやデカルトのお説教だけでは十分でなかった．ニュートンによる具体的な問題解決策が必要であったのである．」少々長いがここに引用させていただいたのは，「いかに？」という問題意識の持ち方が力学をはじめとして自然科学の理論に共通することを認識しておくことが大切であると思うからである．

2. 微積分学と力学

ニュートン・ライプニッツに始まる微積分学は精緻になって，ε-δ（イプシロン・デルタ）法を生み出したのであるが，「いかに」という意識の仕方を念頭においておけば，多くの新入生諸君にとって取っ付きにくいこの論法に対する悩みはいくらかでも軽減されるのではないだろうか．いかに「無限」を手なずけるのに歴史的時間がかかったかはそのうちに然るべき本を読めば分かるようになるが，ε-δ 法は「限りなく（無限に）近づく」等の概念を有限の側から述べているのであって，ε-δ 法に従えば，とりあえず，「無限に」の山は越せるのである．然るべき本とは数学の歴史とか科学哲学の本であるが，筆者が学生時代に古書店で見つけた本[2)]にはいろいろ書いてあって，内容はよく分からないものの哲学者は偉いものだと感じた次第である．上で「有限の側から」と書いたのは，この本の中に「無限は無限である限り直接的な形相をもち得ず，従ってこれを直接に直観することは出来ない．（中略）無限者の思惟には形相直観とは別な「純粋思惟」——独自な近世的概念としての純粋思惟を要請せねばならぬ．」と書いてある部分をうけているつもりである．「無限」から逃げないで向き合ってみたい余裕のある人には手ごろな読物として文献 3) を紹介しておく．

さて，力学と微分積分学のルーツは，もちろん共通しているのであるが，特に力学にとって大事

なのは「速度」の概念である．新入生諸君は「ゼノンのパラドックス」をご存知だろうか．パラドックスはいくつかあるのだが，力学に関係が深いのは「飛矢不動」のパラドックスである．ギリシャの昔に高速度カメラはもちろんなかったのであるが，今風にいうと，このパラドックスは次のようになる．高速度カメラで飛んでいる矢を撮影すると，矢の静止画が得られる．このように各瞬間瞬間では矢は静止している．したがって，飛んでいる矢は飛べない，というものである．このパラドックスが解けなければ矢の運動は理解できないが，微積分を知っている現在の視点からすると，ギリシャの昔には「速度」の概念がなかったということになる．「速度」は微積分学の概念であり，ニュートン・ライプニッツを俟って初めて確立され，このパラドックスがやっと解けたのである．今，矢が直線運動をしているとして，短い時間 Δt の間に短い距離 Δx だけ移動したとしよう．このときの矢の平均速度は $\Delta x/\Delta t$ である．Δt がうんと短くなる（$\Delta t \to 0$）とすると，その間の移動距離もそれに伴ってうんと短くなる（$\Delta x \to 0$）．だからといって，矢は各瞬間で静止するとみるのではなく，ある有限の速度 v をもつ（$\Delta x/\Delta t \to v$）とみるのである．いいかえると，$0/0$ は極限の意味で有限の値をもちうるというのが微積分学における発見である．そして，ある時間間隔 $a \le t \le b$ をいくらでも細かく刻んで，個々のごく短い時間 Δt における移動 $\Delta x = v\Delta t$ を，刻みの多さに見合うだけ積み上げれば，実際に有限距離の移動 $\left(\sum \Delta x = \sum v\Delta t \to \int_a^b v(t)dt\right)$ が可能となるのである．

運動の状態は「位置」と「速度」で指定されるというのが，現在の力学の考え方である．ところで，位置と速度は物体（力学では仮想的に質点を考える）の運動があって初めて定義されるものなのだろうか．力学的な運動のないところには位置の概念も速度の概念もありえないのだろうか．力学を始める前に，数学的な考えでは，先見的に位置と速度をある特定の質点の存在を抜きにして考えうるのである．いま，x 軸上を運動する質点を

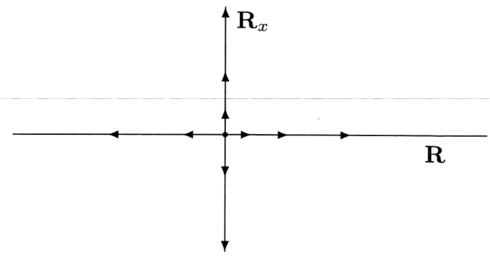


図 1　ある点でのいろんな速度ベクトル．

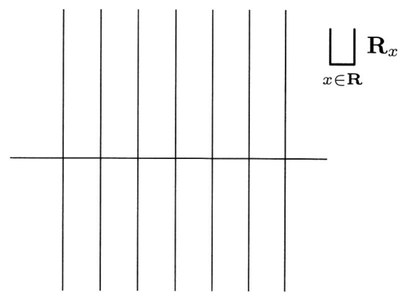


図 2　速度ベクトルの全体 $\mathbf{R}_x$ の総和．

考える．ただし，力学はまだ始めないのでニュートンの運動方程式は考えない．x 軸上のある点を通過する質点は，正の方向に早く，あるいはゆっくりと，また，負の方向に早く，あるいはゆっくりと，いろんな速度で通過する．上の図はこのような様子を描いたものである．考えている点での速度ベクトルを x 軸に直交する方向に描くと，その点を通過するときの状態が見やすい．点 x での考えうるすべての速度の全体を $\mathbf{R}_x$ で表し，これらを，すべての x について寄せ集めると $\mathbf{R}^2$ ができる．

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \bigsqcup_{x\in\mathbf{R}} \mathbf{R}_x.$$

これを，**相空間**（平面）という．物理の本では位相空間と呼んでいるが，数学の本では位相空間は別の概念を表すのに用いられるので，相空間と呼ぶ（正しくは，位置と運動量の空間が相空間）．ここでは，直線上の質点の運動を考えたので，相空間は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ であるが，3 次元の空間 $\mathbf{R}^3$ 内の質点の運動に関する相空間は $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ である．

相空間内で実現可能な運動はニュートンの運動の法則で規定される．今，$\mathbf{R}^3$ 内の質点の質量が m

で，ニュートンの運動の第2法則が $m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ で与えられるなら，相空間での微分方程式は，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ で位置と速度の組を表すとき，

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{v},\quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

の形に書ける．この微分方程式の解が相空間の中に実現する実際の運動を表す．

簡単な例を挙げておく．1自由度の単振動の微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ を考える．ただし，ω は正の定数．この方程式は相平面 $\mathbf{R}^2$ において

$$\frac{dx}{dt}=v,\quad \frac{dv}{dt}=-\omega^2x$$

という微分方程式と同値である．ここで，

$$z=\omega x+iv$$

とおいて，複素数 z を導入して，相平面 $\mathbf{R}^2$ を複素数平面 $\mathbf{C}$ に仕立て直す．すると，上の微分方程式から

$$\frac{dz}{dt}=-i\omega z$$

という z についての微分方程式が得られる．これは簡単に積分する（解く）ことができて，解

$$z(t)=z_0e^{-i\omega t}$$

が見つかる．ただし，$z_0=z(0)$．今，

$$z_0=\omega(a+ib),\quad z(t)=\omega x(t)+iv(t)$$

とおいて上の解に代入すると，

$$\begin{aligned}x(t)&=a\cos\omega t+b\sin\omega t,\\ v(t)&=b\omega\cos\omega t-a\omega\sin\omega t\end{aligned}\qquad(1)$$

のように，簡単に単振動の解が求まる．

3. 万有引力

さて，ニュートンといえば，りんごと万有引力の話が有名であるが，「リンゴが落ちたって万有引力は発見できないさ」[4] という面白いエッセイを紹介したい．その記事では，プリンキピアの記述にしたがって，ケプラーの3法則から，逆2乗の引力が導かれる過程が簡潔に解説されている．もちろん，ケプラーの3法則とは，次の3つである．

1) 惑星の軌道は太陽を一方の焦点とする楕円である．
2) 太陽と惑星を結ぶ直線が単位時間に掃過する面積は一定である．
3) 太陽の周りの惑星の公転周期の2乗は楕円軌道の長半径の3乗に比例する．

実はニュートンは微積分の創始者ではあるにもかかわらず，逆2乗の引力を導くのに，我々が現在学ぶような微積分は使っていないのである．思想的には微積分を使っているのであるが，まだ創成期の微積分を前面に出すより，十分に信頼のあるユークリッド幾何のスタイルをとって証明するほうが受け入れられやすかったという事情によるらしい．

天体の運行には逆2乗の引力が働いているらしいということを予想して，実際にケプラーの3法則から逆2乗の引力を導いてみせることは，天才ニュートンにとって容易だったかもしれないが，何もないところから逆2乗の引力を思いつくことは困難であろうことは想像がつく．逆2乗の法則をめぐるニュートンとフックのやり取りを文献5) で読むことができる．また，天体力学の史的展開は文献6) に見事に解説されている．

4. 微積分の力

ここでいう力は，もちろん力学的な力ではない．第1節でも触れた具体的な問題解決における微積分の力のことである．逆2乗の引力を知っておれば，2体問題で解くべき微分方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-c\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},\quad r=\|\boldsymbol{r}\|\qquad(2)$$

である．ただし，c は正の定数で，2物体の質量と万有引力定数で決まる．この方程式を解くということは，微分方程式論の立場からは，与えられた初期条件のもとで解を t の関数として求めることなのであるが，多くの力学の本はそこまで書いていない．実際のところ，保存量（運動の間一定の

値をとる量）を求めて，独立変数の数を減らして行き，解が曲線として，円錐曲線の形をとることを証明し，そこから，ケプラーの3法則を導いている．ここで用いる保存量とは，角運動量ベクトルと，離心率ベクトル（ルンゲ・レンツベクトルともいう）である[7)]．解を t の関数として表示するには，周期軌道（楕円軌道）の場合には，フーリエ係数にベッセル関数が表れるフーリエ級数が用いられる[8)]．

万有引力の発見は，微分方程式の立場からすると，運動方程式を解くという**順問題**でなく，解のありようから運動方程式を，具体的には力を決定するという**逆問題**を解いたことになるのである．普通の力学の教科書には逆問題の記述はあまり見当たらないのであるが，天体力学の教科書[9)] にはさすがに取り上げられている．

ここまで，できるだけ数式は最小限で済ませてきたのだが，微積分の力を示すにはやはり数式を使ってやって見せるしかないので，以下では上述の逆問題の解法を，文献 9) とは異なる形で実演することにする．

運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{3}$$

の右辺 $\boldsymbol{F}$ は未知であるが，解軌道の性質（ここでは，ケプラーの3法則）が観察結果等から分かっているときに，$\boldsymbol{F}$ を決定するという問題を実際に解いてみよう．まず，軌道が平面曲線であるということ（第1法則）と，面積速度 $\|\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\|/2$ が一定であるということ（第2法則）から，角運動量 $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ が保存される．このことと運動方程式とから

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = m\boldsymbol{r} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0$$

が成り立つ．これは，$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{r}$ に比例していること，すなわち，$\boldsymbol{F}$ は中心力であることを意味する．したがって，$\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = f(\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{4}$$

の形に表すことができる．つまり，$\boldsymbol{F}$ はただ1つの未知関数で決まることが分かったのである．

次に，楕円軌道が x-y 平面内にあるとして，計算に必要な公式をいくつか用意しておく．$\mathbf{R}^3$ に円柱座標 (r, θ, z) をとって，動標構

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を導入する．すなわち，$\boldsymbol{e}_r$ は x-y 平面内の動径方向の単位ベクトルであり，$\boldsymbol{e}_\theta$ は x-y 平面内で $\boldsymbol{e}_r$ を $\pi/2$ だけ，$\boldsymbol{e}_z$-軸周りに正の向きに回転したベクトルである．このとき，

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \boldsymbol{e}_\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\boldsymbol{e}_r\frac{d\theta}{dt} \tag{5}$$

が成り立つ．さらに，x-y 平面内の動径ベクトル $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ に対し，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\boldsymbol{e}_r) = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta \tag{6}$$

が成り立つ．すると，平面運動の角運動量は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= m\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = mr\boldsymbol{e}_r \times \left(\frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta\right) \\ &= mr^2\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = mr^2\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

と表される．これより

$$L = \|\boldsymbol{L}\| = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

がいえる．（ただし，$d\theta/dt > 0$ とした．）$d\theta/dt = L/(mr^2)$ を用いると，(5) と (6) はそれぞれ

$$\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = \frac{L}{mr^2}\boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt} = -\frac{L}{mr^2}\boldsymbol{e}_r,$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + \frac{L}{mr}\boldsymbol{e}_\theta$$

と表される．さらに，これを微分して，L が保存量であることを利用して，

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{m^2r^3}\right)\boldsymbol{e}_r \tag{7}$$

を示すことができる．(4), (7) より，運動方程式

(3) は次式に帰着する．

$$m\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{L^2}{m^2r^3}\right)=f(\boldsymbol{r}). \qquad (8)$$

ここで，運動方程式が楕円軌道で表される解をもつという事実（第1法則）を利用する．解軌道の表示式 $(1+\varepsilon\cos\theta)r=b^2/a$（$a,b$ は楕円の長，短半径で，$\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$ は離心率）を微分して，r 倍し，さらに $L=mr^2\dot{\theta}$ を用いると，

$$-\varepsilon\sin\theta\frac{d\theta}{dt}r^2+(1+\varepsilon\cos\theta)r\frac{dr}{dt}$$
$$=-\varepsilon\sin\theta\frac{L}{m}+\frac{b^2}{a}\frac{dr}{dt}=0.$$

これをさらに微分して，

$$-\varepsilon\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{L}{m}+\frac{b^2}{a}\frac{d^2r}{dt^2}=0.$$

r^2 をかけて変形すると，

$$\frac{b^2}{a}r^2\frac{d^2r}{dt^2}=\varepsilon r^2\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{L}{m}$$
$$=\varepsilon\cos\theta\frac{L^2}{m^2}=\left(\frac{b^2}{ar}-1\right)\frac{L^2}{m^2}.$$

これから，

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{L^2}{m^2r^3}-\frac{aL^2}{b^2m^2r^2} \qquad (9)$$

が得られる．(8) と (9) を併せて

$$f(\boldsymbol{r})=-\frac{aL^2}{b^2m}\frac{1}{r^2} \qquad (10)$$

が分かる．これで，働く力は引力で，その大きさは距離の逆2乗に比例するという結論が導けたのだが，係数は軌道（初期条件）に依存する形になっているので，このままではまだ法則と呼べない．ここで，第3法則が意味をもってくるのである．動径が1周期 T の間に掃過する面積は楕円の面積に等しいので，

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T\left\|\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right\|dt=\frac{LT}{2m}=\pi ab \quad (11)$$

が成り立ち，第3法則は

$$\frac{2m\pi ab}{L}=T=\gamma a^{3/2}, \quad \gamma=\text{const.}$$

と表される．これにより (10) の右辺の係数が

$$-\frac{aL^2}{b^2m}=-\frac{4m\pi^2}{\gamma^2}$$

と書き換えられる．これは，引力が軌道の形（初期条件）に依存しないことを示している．

文献 10) にも逆 2 乗法則の順問題と逆問題が解説されている．同書は教科書に名の載る数学者に焦点をあてて解析学の発展をたどっているもので，含蓄のある書である．

5. フックの法則

ニュートンに比肩するのはフックである．微積分の力をフックの法則で試してみよう．フックの法則に従う引力が作用するときの運動方程式は，$\mathbf{R}^3$ において

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-k\boldsymbol{r} \tag{12}$$

である．ただし，$k>0$ はバネ定数である．この方程式は，$\boldsymbol{r}$ の各成分ごとに 1 自由度の単振動の形であるので，解は (1) の拡張版として

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}\cos\omega t+\boldsymbol{b}\sin\omega t,\quad \omega^2=\frac{k}{m} \tag{13}$$

で与えられる．これは一般には楕円を表す．楕円の長半径ベクトル $\boldsymbol{A}$ と短半径ベクトル $\boldsymbol{B}$ は，$\|\boldsymbol{r}(t)\|$ が最大値，最小値となるような $\boldsymbol{r}(t)$ として，それぞれ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{a}\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\Big)+\boldsymbol{b}\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\Big),\\ \boldsymbol{B}&=-\boldsymbol{a}\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\Big)+\boldsymbol{b}\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\Big)\end{aligned}$$

であることが分かる．ただし，

$$\alpha=\|\boldsymbol{a}\|^2-\|\boldsymbol{b}\|^2,\quad \beta=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$
$$\cos\gamma=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \sin\gamma=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

また，運動の周期は (13) から，$T=2\pi\sqrt{k/m}$ となる．こうしてケプラーの 3 法則に類似した次の事実が得られる．

1′) 軌道は全て原点を中心とする楕円である．

2′) 角運動量が保存される．

3′) 全ての運動の周期は同一である．

ただし，角運動量の保存は運動方程式を解くまでもなく，運動方程式そのものから導かれる．

前節に倣って，逆問題を解く．運動方程式 (3) の解が上の 3 つの条件をみたすときに，$\boldsymbol{F}$ を決定したい．2′) から軌道は平面曲線となることが分かるので，保存される角運動量ベクトルが z 軸と平行になるようなデカルト座標系をとる．すると，運動は x-y 平面でおこり，(4) と同様に，働く力は中心力で，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\phi(r)x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\phi(r)y \tag{14}$$

の形に表される．ここで，1′) を使って，必要なら座標系を回転して，軌道が楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{15}$$

で表されるとする．ただし，$a,b>0$ は定数である．角運動量の z 成分を l とおいた式と，(15) を t で微分して得られる式を連立させると，

$$\begin{aligned}&-y\dot{x}+x\dot{y}=\frac{l}{m},\\ &\frac{1}{a^2}x\dot{x}+\frac{1}{b^2}y\dot{y}=0\end{aligned} \tag{16}$$

が得られる．よって，

$$\dot{x}=-\frac{l}{mb^2}y,\quad \dot{y}=\frac{l}{ma^2}x. \tag{17}$$

(16) の第 2 式をさらに微分し，(14), (15) を使うと

$$\frac{1}{a^2}\dot{x}^2+\frac{1}{b^2}\dot{y}^2+\frac{1}{m}\phi(r)=0$$

が得られる．ここに (17) を代入すれば

$$\phi(r)=-\frac{l^2}{ma^2b^2}$$

が分かる．$\phi(r)$ は定数であるが，軌道の形（初期条件）に依存している．ここで，3′) を用いる．動径が 1 周期 T の間に掃過する面積が楕円の面積 πab に等しいのだから，(11) と同様にして，$lT/2m=\pi ab$ がいえる．したがって，

$$\phi(r)=-\frac{l^2}{ma^2b^2}=-m\Big(\frac{2\pi}{T}\Big)^2=-k$$

は軌道の形に依存しない定数となり，フックの法

則 $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$ が見出された．

6. あとがき

微分方程式は解けないものであるから，解けないまでもそこから有意義な情報を取り出そうとするのが力学系理論の考え方である．ポアンカレーに始まるこの理論の流れを見事に解説した読物[11)]がある．また，少し難しいが文献12) は最高の力学の教科書である．

筆者はかつて「ケプラー問題の展開」[13)] と題して，本誌に一文をものしたことがある．そこでは，全ての有界軌道が閉じるようなハミルトン力学系を多重ケプラー系[14)] と称して定義し，いくつかの軌道のグラフを挙げておいた．いくつかの多重ケプラー系の軌道は筆者のホームページ[15)] でも見ることができる．

参考文献

1) 佐藤文隆：『量子力学のイデオロギー』, 青土社, 1997年.
2) 下村寅太郎：『科学史の哲学』，弘文堂，昭和 16 年.
3) アミール・D・アクゼル著，青木薫訳：『「無限」に魅入られた天才数学者たち』，早川書房，2002 年.
4) 松本 眞：「リンゴが落ちたって万有引力は発見できないさ」，数学通信第 4 巻第 1 号 1999 年.
5) V.I. アーノルド著，蟹江幸博訳：『数理解析のパイオニアたち』，シュプリンガー・ジャパン，1999 年.
6) アイバース・ピーターソン著，野本陽代訳：『ニュートンの時計』，日経サイエンス社，1995 年.
7) V.D. バージャー・M.G. オルソン共著，戸田盛和・田上由紀子共訳：『力学』，培風館，1975 年.
8) 伏見康治：『現代物理学を学ぶための 古典力学』，岩波書店，1964 年.
9) 木下 宙：『天体と軌道の力学』, 東京大学出版会, 1998 年.
10) 溝畑 茂：『解析学小景』，岩波書店，1997 年.
11) F. ディアク・P. ホームズ著，吉田春夫訳：『天体力学のパイオニアたち 上』，『天体力学のパイオニアたち 下』，シュプリンガー・ジャパン，2004 年.
12) V.I. アーノルド著，安藤韶一，蟹江幸博，丹羽敏雄共訳：『古典力学の数学的方法』，岩波書店，1980 年.
13) 岩井敏洋：「ケプラー問題の展開」，数理科学 1995 年 6 月号.
14) T. Iwai and N. Katayama; Multifold Kepler systems – Dynamical systems all of whose bounded trajectories are closed, *J. Math. Phys.*, vol.**36**, 1790–1811 (1995).
15) http://yang.amp.i.kyoto-u.ac.jp/~iwai/kepler.html

（いわい・としひろ，京都大学大学院情報学研究科）

ε–δ 論法の直観的理解

金子　晃

1. ε–δ 論法に出会えましたか？

ε–δ 論法について薀蓄を傾けて解説を書けとのご依頼を頂きました．(薀蓄はともかく，研究室には停年後はどうしようと思うぐらい本は溜まりました．) 昔なら，理系の学生は入学して 4 月の初めにいきなり微積の講義で ε–δ 論法に遭遇し，目を白黒させているうちに夏休みに入り，何だかわからぬまま期末試験だけは通って，そのまま ε–δ 論法のことは忘れてしまう，という人生の人が多かったのではないかと推測します．著者がその頃教えた学生が，今は社会の中堅で活躍しておられることと思いますが，数学を仕事で本格的に使っておられる方は，著者の拙い講義にもめげず，自分で ε–δ 論法を学び直して使いこなしておられることでしょう．生涯一教師の著者としては，一度，卒業生に向けて，“その後の人生で ε–δ 論法とどのような出会いがありましたか？” というアンケートをとってみたかったですね．

しかし，最近，といっても，もう 20 年近く前から，ε–δ 論法は教えずに済ますという風潮が広まり，それ以降に学生をやられた方たちの中には，もしかすると ε–δ 論法に出会う機会を持たれずにしまった方も少なくないかもしれません．今日はそういうお気の毒な方のために，著者が講義して来た ε–δ 論法のエッセンスをご披露しましょう．

2. ε–δ 論法とは？

ε–δ 論法とは，19 世紀の初め頃まで，直観で理解されていた数列や関数の収束の概念を，数式で計算できるようにするために導入された表現法のことです．例えば，数列の収束は直観的には

定義 1　数列 a_n が極限 a に収束するとは，番号 n を大きくしていくと，a_n と a の差がどんどん小さくなってゆき，もしそのまま永久に続けることができれば，遂には a_n は a と一致するであろう，と思われる状況を言う．

ということです．実はこの形での認識さえも，19 世紀初めのボルツァーノやコーシーによるもので，それ以前には明確な定義もありませんでした．この説明は大変分かりやすいもので，例えば数列 $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ がこの意味で 1 に収束するというのは，誰も疑いません．他方，$a_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}$ が 3 に収束するというのは，普通の人には全然見えませんが，コンピュータで実験してみると，うん間違いないと思えてきます．こちらが自明でないのは，数列が複雑だからであって，収束の定義が直観的だからではありません．なので，収束するかどうかの判定なら，コンピュータも使えば上の直観的理解で十分なように見えます．

しかし，いつでもコンピュータばかりに頼ってもいられません．数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ は

15.403683 に収束する，という主張は，微積分をちょっとでも習った人には，すぐに嘘だと言ってほしいのですが，そうかなあと思ってコンピュータで実験してしまうと，その通りだった，なんてことになりかねません．やはり少しは計算可能な表現が必要なようですね．

3. ε–δ 論法の定義

定義 1 を ε–δ 論法で表現するとこうなります：

定義 2 数列 a_n が極限 a に収束するとは，どんなに小さな正の数 ε が与えられても，それに応じて番号 N を十分大きく選べば，$n \geq N$ なるすべての番号について $|a_n - a| < \varepsilon$ となることを言う．

述語論理の記号 $\exists$（存在する），$\forall$（任意の），$\Longrightarrow$（ならば）を使うと，これは次のように書けます：

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \;\; \text{s.t.} \;\; n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

ここで s.t. は such that（以下の如き）の略で，使うのは数学者だけですが，読みやすくするために $\exists$ とペアでよく出てきます．まだ δ が登場しませんが，N がその代わりをしているので，この表現も普通は ε–δ 論法と呼んでいます．これを細かく区別して ε–N 論法と言う人もいます．

ε として 10^{-8} をとると，上は，“N を適当に選ぶと，それ以上の番号については，8 桁の電卓では，a_n と a が区別できなくなる”，と言っているのです．これだけではもちろん収束は保証されません．実際に，10 桁の電卓を持ってくると，まだ最後の 2 桁が違っているかもしれません．しかし，N をもう少し大きな N' にするとここも一致するようなら，収束は更に確からしくなります．

著者が昔奉職していた東大教養学部（以下単に駒場ということにします）の旧数学教室には，服部時計店（精工舎）製の 24 桁の電卓がありました．電卓と言っても，1970 年頃で 100 万円もしたらしく，100 ステップ程度の簡易プログラミングもできた，文字通りの “卓上計算機” ですが，表示 24 桁というのが，当時はコンピュータがどちらの方向に発展するものか模索していた時代を反映していて面白いと思います．この機械もそうですが，山崎圭次郎先生の旺盛な探求心のお蔭でいろんなコンピュータに触れることができ，今の職場でその知識がとても役立っています．

話が脇にそれましたが，この電卓の化け物で計算すると，a_n と a はまだたくさんの数字が異なるでしょう．それでもやはり，更に大きな N'' にすると，そこから先はこの巨大な表示窓でも一致してしまったら，もう収束を信じるでしょう．以上のように，N は ε に応じて取り替えなければいけないので，その ε 依存性を表すために N の代わりに n_ε などと書くのが普通です．

最近では，maxima, risa/asir, pari/gp など，自由にダウンロードして使えるソフトの中に，何桁でも計算できるものが手軽に手に入ります．これらを使うともっと先まで実験できます．実際には，無限に実験を続けることはできませんが，上の定義はこのような仮想実験を無限に繰り返してもパスすることを述べたもので，非常に自然なアイデアだと思います．コーシーたちが電卓もない時代にどうしてこんなアイデアに到達できたのか不思議ですが，多分当時も手計算でこれと同じような実験を数学者は日常茶飯事でやっていたのでしょうね．そこで以下，ε–N による判定法を**仮想電卓**による判定法と呼ぶことにしましょう！

4. ε–δ 論法の必要性

ε–δ 論法は，話を難しくするために数学者が考え出したのだと思っている人が居るみたいですが，もし本当なら，こんなもの要らない，で済ませちゃえますね．しかし，事実はもちろんその逆です．一部の天才数学者だけが数学をやっていた時代には，収束の定義などしなくても正しい直観によるだけで，間違った結論に到ることはなかったのですが，次第に数学者が大衆的な職業化してくると，皆が皆，正しい直観が常に働くことは期待できな

くなりました．ならば誰でも間違えずに議論できるような枠組みを作ろう，ということになったのです．言わば ε–δ 論法は，微積分の大衆化の一環なのです．実際コーシーの著書[1]も，大学でのこのような教育のために書かれたのでした．(実は彼はもっと過激に，“大数学者も時には間違ってきたのだから，ほってはおけない” と言っています．）だから，これを捨てて，全部直観でやれというのは，学生に，“お前も 18 世紀の天才たちのようになれ”，と強要しているようなものなのです．というわけで，今回与えられたタイトルは，言わば自己矛盾ですね．

では，どんなところで，ε–δ 論法が必要になるかというと，例えば，次のような主張です．

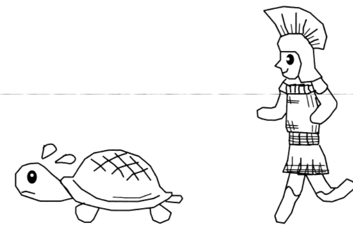
定理 1 数列 a_n は a に収束しているとする．もし a_n が常に M 以下なら，a も M 以下である．

これは，ε–δ 論法を用いると次のように証明できます：背理法による．もし，$a > M$ とすると，$\varepsilon = a - M > 0$ なので，これに対してもコーシーによる収束の定義が適用できなければならない．するとある N について $n \geq N$ のとき $|a_n - a| < \varepsilon = a - M$．$a - a_n \leq |a_n - a|$ なので，これより $a - a_n < a - M$，従って $a_n > M$ となり仮定に反する．　(証明終)

こんな証明されなくても，直観的に分かるじゃないかと言う人，では次の主張との区別ができますか？ アキレスは “アキレス腱” に名前が残っている有名な古代ギリシャの高速ランナーです．

アキレスと亀 アキレスが亀と競争した．ハンディをつけるため，亀はアキレスの 10 m 先から出発した．するとアキレスは永久に亀に追いつけない．

ゼノンによる証明：アキレスの出発点を a_1 とする．アキレスが亀の出発点 a_2 に着いたときには，亀は遅いといえども，少し先の a_3 には進んでいる．アキレスがその a_3 に達すると，亀は更にそのちょっと先の a_4 には進んでいる．こうして永遠にアキレスは亀に追いつけない．



こんなの詭弁だよ．そうです，これは古代ギリシャの時代に流行った詭弁の代表格です．実際にはアキレスはいつの間にか，亀の前に出ています．あれっ，だったら定理 1 の数列も，極限で突然ワープして M を越えてしまう恐れはないのですか？

お客さまに途中で逃げられないよう，もう少し実のある例を出しましょう．証明は略しますが，これも ε–δ 論法の適用例として代表的なものです．

定理 2 数列 a_n が a に収束していれば，それらから平均をとって得られる数列 $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ も a に収束する．

ここまでくると，直観が働く人が急激に減るのではないでしょうか？ この主張は ε–δ 論法を使わずに納得するのはかなり大変です．ただ，この問題を，b_n は $n \to \infty$ のときどうなるか？ という形に変えられると，最初から ε–δ 論法だけでは解決できません．答の予想には直観が必要です．いろいろ候補を当たって，ε–δ 論法は最後にそのうちの一つが正しいと確信を得るために使うのです．そもそも証明とは皆そういうものですね．最初から定理が証明付きで降ってくるわけではありません．数学は実験科学です．教え方を誤ると，このことを理解しない学生ができてしまいます．

■ 5. 難しいのは数学？ それとも論理学？ ■

もう一つ，ε–δ 論法がつぼにはまる有名な例を示しましょう．次の定理は解析学における証明の中で手段としてけっこうよく使われるものです．ここで，数列 a_n の**部分列**とは a_n から無限個の番号を引き抜いて作った数列のことで，$a_{n_k}, k = 1, 2, \ldots$

などと記されます．

定理 3　数列 a_n のどの部分列も，その更に部分列で，a に収束するようなものを含むとする．このとき実は a_n 自身が a に収束する．

昔々この定理の証明を期末試験に出したところ，答案用紙の裏面に一杯点を書いて，“どうやら確からしい”と答えてくれた学生が居ました．“実験する精神や良し”ですね．ちなみにこのときの正答者は3名で，以後2度と試験には出していません．

さて，上の主張は例によって背理法を使うと簡単に証明できます．結論 $a_n \to a$ を否定すると，(1) の否定命題

$$\exists\, \varepsilon \text{ s.t. } \forall\, N\, \exists\, n \text{ s.t. } n \geq N \text{ かつ } |a_n - a| > \varepsilon \tag{2}$$

が得られます．このような述語論理の命題の否定の作り方は論理学の守備範囲であり，実質的にはコーシーよりずっと前から使われていたものです．このように記号化されたのは19世紀末ですが，そのお蔭でコンピュータにもできる機械的計算の一種となりました．これらは，大学教育では，普通は論理学として別途教えられることよりも，微積の講義でいきなり教わるほうが多いので，初対面のとまどいが数学の難しさのせいにされるのでしょう．しかし，一旦形式を理解してしまえば，この作業は全く頭を使わなくてもできます．すなわち

★　$\forall$ と $\exists$ を入れ替える．

★　“$A \Longrightarrow B$” は “A かつ $\neg B$” で置き換える．

★　不等号 $<$ を $\geq$ と，$\leq$ を $>$ と，また $=$ を $\neq$ と入れ換える．

(2) から，このような ε に対して，まず $N = N_1$ として 1 をとり，$n \geq N_1$ かつ $|a_n - a| > \varepsilon$ となる番号の一つ n_1 を選んで $b_1 = a_{n_1}$ を定める．次に $N = N_2 > n_1$ に対して同様に $n \geq N_2$ かつ $|a_n - a| > \varepsilon$ となる番号の一つ n_2 を選んで $b_2 = a_{n_2}$ を定める．以下これを繰り返せば，a_n の部分列 b_n で $\forall\, n$ について，$|b_n - a| > \varepsilon$ となるものが得られますが，このとき，b_n のどんな部分列をとっても a に収束する部分列 c_n は取り出

せません．そのような列はいつかは $|c_n - a| < \varepsilon$ を満たさねばならないからです．よって仮定と矛盾するので (証明終) です．

冒頭にもちょっと書きましたように，駒場では 80 年代の終わり頃から，理論的な数学をあまり必要としない学科への進学者のことを考え，分かりやすい微積を目指して，従来型の ε–δ をちゃんと教えるクラスと並び，これを省いて計算を中心とするクラスを設けるということを始めました．それ以来，何となく後者のほうが一般向けクラスという観念が定着し，著者もそのように考えてきましたが，現職の情報科学科で教えるようになって，実はここでは，微積のハードな計算が必要な研究室は少数で，むしろ ε–δ 論法のような論理的思考の訓練のほうが多くの研究室に向いていることを知りました．世の中でもそういう可能性があるのではないかと推測しています．高校数学からも証明という言葉が消えつつある（あるいは，式の変形と同義語になりつつある）こともあり，少し考え直したほうが良いように思います．この特集ももしかしてその一環でしょうか？

今は微積の計算はコンピュータがすいすいやってくれる世の中なので，現実にもあまりハードな計算を手でたくさん練習する必要はありません．このことは数値の計算ではもう一致した了解になっています．ただし教育とは難しいもので，行きすぎると，電卓に頼りきりで，桁の概算ができなくなり，間違った答に気づかない子を量産してしまうので，式の計算でも，同様の過ちをしない程度には訓練を続ける必要がありますが．

■ 6. コーシー列 ■

上に述べた数列の極限の定義は，収束先が既知でないと使えません．しかし，収束するかどうかというところから実験しなければならないことも多いでしょう．実はこれぞ仮想電卓の出番なのです．数列 a_n が $n \to \infty$ のときどうなるか全く知識がないとき，人はまず 8 桁の電卓で，いくつかの n について a_n の値を計算してみるでしょう．n が大きいとき，電卓の窓の数字が一定になるようなら，数列は収束するのではないかと当たりをつけます．次に 10 桁の電卓を持ってくると云々．こうして，次のような定式化に達します．

定義 3　数列 a_n が**基本列**，あるいは**コーシー列**であるとは，$\forall\, \varepsilon$ に対し $\exists\, N$ を適当に選ぶと $\forall\, n, m \geq N$ について，常に $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となっていることを言う．

定理 4　コーシー列は収束する．

これが有名なコーシーの判定条件ですが，実はボルツァーノのほうが少し先に与えています．コーシーの名が残ったのは，地の利と教科書を書いた強みでしょうか？ いずれにしても，彼らはまだこういう記号法は使っておらず，証明もできませんでした．証明するには以下のように実数の連続性公理が必要で，それは後のデデキントやカントルを俟(ま)たねばなりませんでした．

電卓の窓に一定の数字が並んでいっても，それを十進展開の数字に持つような実数の存在は全く明らかではありません．そんなことでもったいぶるなと言わないでください．かのピタゴラスも，$\sqrt{2}$ という数の存在に気づいたとき，これを数の一つとして認めるべきかどうかで悩み，何年もの間教団の機密としたのですから．19 世紀後半になって，デデキントたちが実数の公理系を整備し，これらすべてを実数の仲間に入れても大丈夫な保証をしたので，今では定理 4 は普通に認められています．この性質を実数の**完備性**と言います．

定理 4 は仮想電卓の ε を 10^{-N} のような有理数に限定しておけば，実数の連続性公理，例えば，“有界単調列の収束” と同等です．しかし，ε を単に実数と言ってしまうと，同値ではなくなります．このことを著者が講義中に学生の一人から指摘されたのは，駒場で教え始めた最初の年でした．あわてて研究室に帰って，先輩たちに確かめたところ，そんなことはここでは常識であることを知った次第です．駒場の旧数学教室は，第一研究室と呼ば

れた，今はすっかり消失してしまった駒場寮の建物群のうちの南寮という建物の一角にあり，学科の事務室には長谷川さんという素敵なセクレタリー（ゼネラルマネージャー）が居て，スタッフは皆一仕事終えるとこの部屋に集まり，お茶を飲みながら雑談しているうちに，自然と教育上のノウハウを先輩から吸収できました．ここで著者も故杉浦光夫先生を初め，個性豊かな先輩たちから非常に多くのことを学びました．いわゆる FD の魁（さきがけ）ですが，自然にできたもの故にすばらしい環境でした．

ところで，実数の公理系が本当に無矛盾かどうかは，今でも完全には決着していません．微積を自信を持って教えるのは本当に難しいことですね．今もし，学生にこの辺りを突かれたら，どうしよう．

■ 7. 連続極限と真の ε–δ 論法 ■

タイトルが ε–δ 論法なのに ε–N 論法だけで済ませてしまっては申し訳ないので，この辺で δ にも登場してもらいましょう．独立変量 x に依存する量 $f(x)$（普通の言い方をすれば，関数 $f(x)$）があるとき，$\lim_{x\to a} f(x) = b$ とは，x が実数値で連続的に a に近づくとき，$f(x)$ が限りなく b に近づくことです．これをコーシー流に言い換えると，

定義 4 $\lim_{x\to a} f(x) = b$ とは，$\forall\,\varepsilon > 0$ に対し $\exists\,\delta > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta$ なるすべての x について $|f(x) - b| < \varepsilon$ となることを言う．

実は次のようなすばらしい定理があるので，実数の収束概念は本質的には数列でかたがつくのです：

定理 5 $\lim_{x\to a} f(x) = b$ となるためには，a に近づくすべての数列 $a_n \neq a$ について，数列として $f(a_n) \to b$ となることが必要かつ十分である．

これも ε–δ 論法と背理法で容易に証明できます．ここではそれは省略し，ε–δ 論法を関数の連続性に適用し，それをグラフの描画で体感してみましょう．連続関数とは，ボルツァーノやコーシーによれば，グラフがつながった曲線になるような関数のことで，現代の記号ではこうなります：

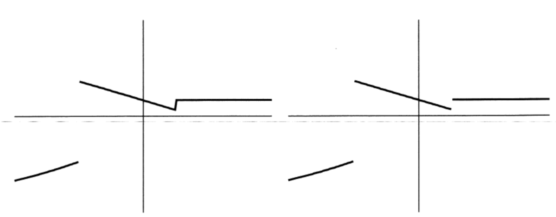
定義 5 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ となること，すなわち，$\forall\,\varepsilon > 0$ に対し $\exists\,\delta > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta$ なるすべての x について $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となることを言う．

この定義を用いてコンピュータにより所々で不連続な次の関数のグラフを描きましょう：

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & -4 \le x < -2 \text{ のとき}, \\ -0.3x + 0.5, & -2 \le x < 1 \text{ のとき}, \\ 0.5, & 1 \le x \le 4 \text{ のとき}. \end{cases}$$

関数のグラフは折れ線で近似して描きます．適当な分割数 N を決め，描画範囲 $[a, b] = [-4, 4]$ を N 等分してメッシュ（刻み幅）$h = \frac{b-a}{N}$ と，対応する分点 $x_0 = a = -4, x_1 = a+h, \ldots, x_i = a+ih, \ldots, x_N = a+Nh = b = 4$ を決めます．この準備の後，まず $x = a$ に対して $y = f(x)$ を計算し，描画点を (x, y) に移動し，以後次々に x を $x+h$ で置き換え，$y = f(x)$ を再計算して，先の描画点からこの新しい描画点に線分を引く操作を繰り返します．ただし，関数が不連続なところは結んではいけないので，結ぶかどうかを ε–δ 論法の定義に照らして判定します．ε を無限に小さくできる**仮想ディスプレイ**なら，これで不連続性の判定はばっちりですが，現実には解像度の限界があるので，適当なところでの近似となります．下図は左が $\varepsilon = 0.5$，右が $\varepsilon = 0.1$ で判定した結果です．学生に自分で ε を選択させると，ε–δ 論法体得の良い実習になるでしょう．

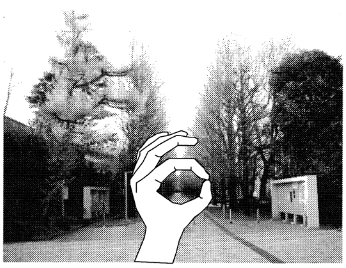
本稿では紙数の制約も有って（昔話が多すぎて，かな），本当にコンピュータで実験するときに必須となる丸め誤差の話はできませんでしたが，拙著[3] に詳しく書きましたので，ご参照ください．



■ 8. ε–δ 論法を銀杏並木で体感しよう ■

大学には大抵，時計台などのメインな建物に向かってきれいな並木がありますね．並木のはずれに立ち，目の前に指で輪を作り，その中に手前から数えて何番目の木から先が収まるかを見ます．この輪を次第に縮めてゆくと，輪の中に入る木はどんどん遠ざかり，遂には透視図法の消点だけが残ります．輪の半径が ε，その中に入る最も手前の木の番号が n_ε というわけです．

キャンパスが狭く並木が短いとこの実験は難しいのですが，駒場の銀杏（いちょう）並木はキャンパスを横断するメインストリートに沿っているため，規模の割には長く，実験には最適です．昔の旧北寮前は学生運動の立看板が賑やかで，一番良い位置まで近づき難い雰囲気でしたが，今は人に怪しまれないように気をつけるだけで，実験は簡単にできます．これで表題に対する義務も果たせたかな？



駒場の銀杏並木は，はるか西門に続き，その向こうに直接は見えない富士山を極限として想像できます．（高い建物に登れば，駒場からも富士山が見えることはあります．）並木と言えば，北大のポプラ並木のほうが長いし有名ですが，あの並木はどこに収束するのか，何度見物しても分かりませんでした．どなたかご存知なら教えてください！

参考文献

1) コーシー『微分積分学要論』，小堀　憲訳，共立出版，1969.
2) 金子　晃『数理系のための基礎と応用微分積分 I, II』，サイエンス社，2000, 2001.
3) 金子　晃『数値計算講義』，サイエンス社，2009.

（かねこ・あきら，お茶の水女子大学理学部）

多変数の微積分

少し現代的なアプローチ

平地 健吾

1. はじめに

多変数の微積分がはじまると変数が増えた分，記号が複雑になって公式を覚えるのも大変と思うかもしれません．これは計算に便利な記号を使っているのが原因で，実際にはもっとスッキリと書くことができます．本稿ではきれいな記法（現代的なアプローチ）にこだわりながら，前半では1年生向けに多変数の微分を，後半では2年生（すでに多変数の微積を学んだ人）向けに微積分学の基本定理の多変数版を解説します．

1変数の関数 $f(x)$ は微分しても同じ1変数の関数 $f'(x)$ です．1階から階段を上ったのにまた1階に来てしまったようで，不思議な現象です．これは $1\times 1=1$ という偶然で1変数の微積分が簡単になりすぎているためです．多変数では微分された関数は上の階に住んでいます．前半では微分を勾配ベクトルとして，後半では1形式として考えます．多変数の微積を学ぶことにより微分とはなにかがより分かりやすくなります．

2. 関数のグラフの概形を描く

関数を目で見る方法としてグラフがあります．1変数の関数なら増減表を書いて極値をつなぐとグラフの概形が描けます．多変数の関数のときにはどうすればグラフが描けるのでしょうか？

2変数の実数値関数 $f(x_1,x_2)$ のグラフは $y=f(x_1,x_2)$ を満たす (x_1,x_2,y) 空間内の曲面です．関数を山の標高だと思えばグラフが山の形を表します．これを1変数のときのようにフリーハンドで描くのは簡単ではありません（試験に出る心配はありません）．例えば多項式で与えられる関数

$$f(x_1,x_2)=-x_1^4+x_1x_2-x_2^4$$

の原点 $(x_1,x_2,y)=(0,0,0)$ の近くの概形は図1のようになります．紙の上に立体図形を描くには適当に切り取ったり陰をつけたりと，数学以外の技術が必要になります．最近ではコンピューターを使えばきれいな立体図が描けるのですが，グラフのどこに特徴的な点（頂上，峠など）があるかを知らないとグラフを切り取る範囲をうまく指定できません．

次節では頂上と峠の探し方を説明します．変数をベクトルと見なせば1変数のときと同じ手法が使えます．

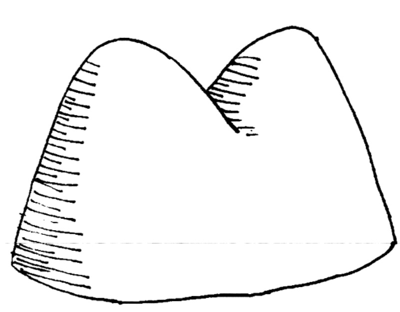


図1　$-x_1^4+x_1x_2-x_2^4$ のグラフの素描．

3. テーラー展開と多変数の微分

1変数の関数 $f(x)$ が $x=p$ の近くで2回微分可能であれば

$$f(p+x)=f(p)+f'(p)x+\frac{1}{2}f''(p)x^2+E(x)x^2$$

という表示（**テーラー展開**）を持ちます．ここで $E(x)$ は $E(0)=0$ をみたす連続関数です．$x=0$ の近くでは $E(x)x^2$ は2次式より十分小さいので $y=f(p+x)$ のグラフは2次関数

$$y=f(p)+f'(p)x+\frac{1}{2}f''(p)x^2$$

のグラフと思って概形を描くことができます．

2変数の関数 $f(x_1,x_2)$ では微分を2種類考えることができます．x_2 を固定して x_1 変数で微分してえられる x_1 **偏導関数** D_1f と，同じく x_2 で微分してえられる x_2 偏導関数 D_2f です．2つの偏微分をまとめて

$$Df=(D_1f,D_2f)$$

とおきます．さらに微分を繰り返すと2次偏導関数 D_iD_jf が定義できます．これらを行列にして

$$D^2f=\begin{pmatrix} D_1D_1f & D_1D_2f \\ D_2D_1f & D_2D_2f \end{pmatrix}$$

とおきます．Df はベクトルに D^2f は行列に値をとる写像です；以下ではこれらの微分の存在を仮定します．ここまで準備すればテーラー展開はベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ をもちいて

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{p})+Df(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x} \\ &\quad +\frac{1}{2}{}^t\boldsymbol{x}D^2f(\boldsymbol{p})\boldsymbol{x}+E(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{x}\|^2 \end{aligned}$$

と書けます．$E(\boldsymbol{x})$ は $E(\boldsymbol{0})=0$ をみたす連続関数，$\|\boldsymbol{x}\|$ は $\boldsymbol{x}$ の長さです．記号の意味を確認すると，$Df(\boldsymbol{p})$ は横ベクトルで第2項は

$$(D_1f(\boldsymbol{p}),D_2f(\boldsymbol{p}))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

という $\boldsymbol{x}$ の1次式；第3項は行列 $D^2f(\boldsymbol{p})$ に行ベクトルと縦ベクトルを左右から掛けた2次式

$$\frac{1}{2}(x_1,x_2)D^2f(\boldsymbol{p})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

になります．

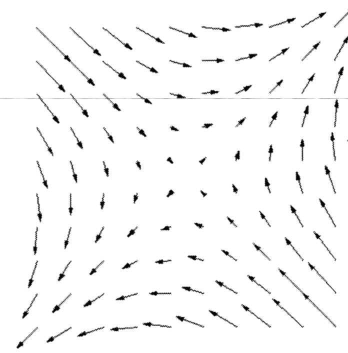


図2　峠の近くの勾配.

この展開からグラフの概形を読み取ることができます．グラフの傾きを決めるのは1変数のときと同じく1階微分 Df です．Df は**勾配**とよばれ $-Df(\boldsymbol{p})$ はグラフ上の点 $(\boldsymbol{p},f(\boldsymbol{p}))$ にボールを置いたときに転がっていく方向を示しています．Df が零ベクトルになるときにはボールは転がらない，あるいはいくつかの方向に転がる可能性があります．このような点を**停留点**または**臨界点**とよびます．山であれば停留点には頂上，峠などの名前がつきます．（峠からボールが転がる方向は2つあります：図2.）図1の関数について勾配を計算すると

$$Df=(-4x_1^3+x_2,x_1-4x_2^3)$$

となり，停留点は $(0,0)$, $\pm(1/2,1/2)$ の3点です．これらの点をさらに詳しく調べます．

斜面を絵で表すには地図のように等高線で使うのが得策です．これなら陰影も遠近法も必要ありません（等高線から山の形を想像する方法は小学校で練習しました)．**グラフの等高線**というのは実数 c に対して $f(x_1,x_2)=c$ をみたす (x_1,x_2) 平面の曲線です．c を動かせば曲線の族がえられます．等高線を数学的に考えるにはまずその存在を調べておく必要があります．斜面では与えられた点を通る等高線がただ1本存在することが証明できます．これは**陰関数定理**の1番簡単な場合で，

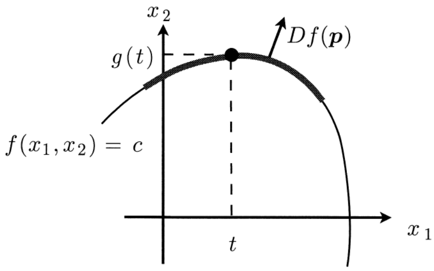


図 3　陰関数は局所的に定義される.

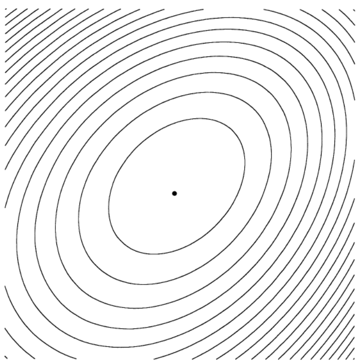


図 4　頂上：$(x, y) = (1/2, 1/2)$ の近くの等高線.

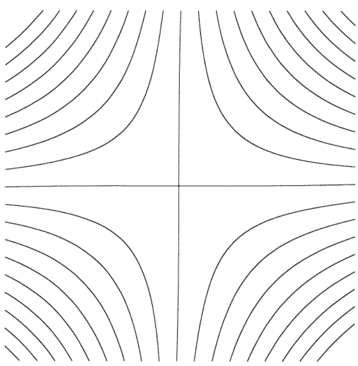


図 5　峠：$(x, y) = (0, 0)$ の近くの等高線.

例えば $D_2 f(\boldsymbol{p}) \neq 0$ であれば $\boldsymbol{p}$ の近くの等高線は 1 変数の連続関数 $x_2 = g(x_1)$ のグラフで与えられます（図 3）. g は条件 $f(t, g(t)) = f(\boldsymbol{p})$ によってきまるので f の**陰関数**とよばれます．停留点では陰関数定理は使えないので等高線が 1 つの曲線になるとは限りません．図 1 の関数の $(0, 0)$ と $(1/2, 1/2)$ の近くでの等高線を見ると（図 4 および図 5），頂上では等高線は 1 点に退化し，峠では 2 つの等高線が交わっていることがわかります．

等高線の形状がこの 2 つのどちらになるかは $D^2 f(\boldsymbol{p})$ の行列式をみれば判定できます. $\det D^2 f(\boldsymbol{p}) > 0$ ならば 1 点に退化, $\det D^2 f(\boldsymbol{p}) < 0$ ならば交点になります．さらに $D^2 f(\boldsymbol{p}) > 0$ の場合には f が $\boldsymbol{p}$ で（近くだけをみれば）最大または最小になるのかは $D^2 f$ の**トレース**

$$\mathrm{tr}\, D^2 f = D_1^2 f + D_2^2 f$$

の正負に順に対応します．まとめると表 1 のようになります．とつぜん行列式とトレースという線形代数の話になりましたが，これは 2 次形式の符号の分類定理を使っているからです（たぶん 1 年生の終わり頃に登場します）．表 1 を見ると

$$\mathrm{tr}\, D^2 f = 0$$

が成り立つと，図 4 の形は現れないことがわかります．この条件を（停留点だけでなく）定義域全体でみたす関数は**調和関数**とよばれ，数学，物理で頻繁に登場します．調和関数は局所的な最大も最小ももたず，平面全体で定義されていれば等高線は閉曲線にならないことがわかります（図 6）.

図 1 の関数の場合はこれで停留点の分類は完成ですが，一般には $D^2 f(\boldsymbol{p})$ の行列式が消える場合を考える必要があります．しかしこれには簡単な

表 1　$D^2 f$ による分類.

	$\det D^2 f$	$\mathrm{tr} D^2 f$
局所的な最大	正	正
局所的な最小	正	負
峠	負	決まらない

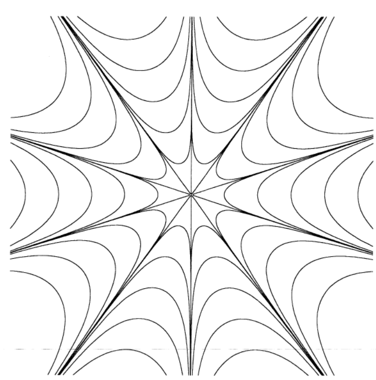


図 6　調和関数 $x_1^5 - 10x_1^3 x_2^2 + 5x_1 x_2^4$ の $(0, 0)$ の近くの等高線.

答えはありません．図 6 のように 5 つの等高線が交わることもあります．高次で退化する関数の挙動には多様性があり線形代数だけでは手に負えません．退化の解析方法としてはニュートン図形を用いる方法が知られています．

4. 微積分学の基本定理を座標を使わずに書く

今度は多変数の微積分学の基本定理はどのようなものかを考えてみましょう．1 変数の場合の定理は

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{1}$$

でした（大学ではこれは積分の定義ではなく定理になります）．変数 x を隠すために

$$df = \frac{df}{dx}dx$$

という記号を導入します．dx は座標変換 $x = g(y)$（ここで g は微分可能な単調関数）について

$$dx = \frac{dx}{dy}dy = g'(y)dy$$

という変換をもつとします（この式には基底の変換としての意味をつけることができますがここでは深入りしません）．このとき df は座標によらず定義されていることが分かります．実際 $h(y) = f(g(y))$ とおけばチェインルールより

$$\frac{df}{dx}dx = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}dy = \frac{dh}{dy}dy$$

となります．これで (1) 式の左辺から変数が消えました．今度は右辺を再考します．a と b は積分区間 $M = [a, b]$ の両端です．区間には数が大きくなる方向という向きが入ります（図 7）．始点には $-$，終点には $+$ の符号をつけて $[a, b]$ の端点 ∂M を形式的な和として $\partial M = -\{a\} + \{b\}$ で定義します．このような形式和の上の積分を

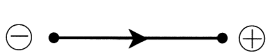


図 7　区間の向き．

$$\int_{\{b\}-\{a\}} f = f(b) - f(a) \tag{2}$$

とおけば (1) 式は

$$\int_M df = \int_{\partial M} f$$

と表せます．ここで重要なのは M の向きだけをもちいて積分は計算できる（座標変換で不変）ということです．この式を高次元に一般化するのがストークスの定理です．定理を述べるには少し準備が必要です．

5. 微分形式の積分と向き付け

変数を 1 つ増やして平面領域 $M \subset \mathbb{R}^2$ での積分を考えます．今度は dx_1, dx_2 の組み合わせが登場します．$f(x_1, x_2)$ を 2 変数の実数値関数とするとき関数を係数とする dx_1, dx_2 の形式和

$$df = (D_1 f)dx_1 + (D_2 f)dx_2$$

を f の**外微分**とよびます．座標変換 $(x_1, x_2) = F(y_1, y_2)$ に関する dx_1, dx_2 の変換則を

$$dy_j = (D_1 y_j)dx_1 + (D_2 y_j)dx_2$$

で定義すれば多変数のチェインルールにより df は座標系によらないことが分かります．より一般にベクトル値の関数 $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対して

$$f = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$$

を **1 形式**とよびます．（f はベクトルには違いないのですが，座標を取り替えたときの変換則もこめて f を 1 形式とよびます．）

次に dx_1 と dx_2 の積 $dx_1 \wedge dx_2$（**2 形式**とよぶ）を考えます．これ以外の組み合わせについては

$$dx_i \wedge dx_j = dx_j \wedge dx_i, \quad dx_i \wedge dx_i = 0$$

を要請して，積を分配則が成り立つように 1 形式の間の積を

$$(f_1dx_1+f_2dx_2)\wedge(g_1dx_1+g_2dx_2)$$
$$=(f_1g_2-f_2g_1)dx_1\wedge dx_2$$

で定義します．この分配則を使い，関数の外微分を 1 形式に

$$\begin{aligned} d(f_1dx_1+f_2dx_2) &= df_1\wedge dx_1+df_2\wedge dx_2 \\ &= (D_1f_2-D_2f_1)dx_1\wedge dx_2 \end{aligned}$$

と拡張します．平面上の微分可能な関数全体のなす集合を Ω^0，1 形式全体のなす集合を Ω^1，2 形式のなす集合を Ω^2 とおくと外微分は

$$\Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2$$

という写像を定義します．

1 形式は曲線上で，2 形式は 2 次元領域上で積分することができます．曲線 $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2, \gamma(t)=(x_1(t),x_2(t))$, 上での 1 形式 $f=f_1dx_1+f_2dx_2$ の積分を

$$\int_\gamma f=\int_a^b\left(f_1\circ\gamma\frac{dx_1}{dt}+f_2\circ\gamma\frac{dx_2}{dt}\right)dt$$

で，2 形式 $f=f_{12}dx_1\wedge dx_2$ の領域 M 上の積分を

$$\int_M f=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}_{12}dx_1dx_2$$

で定義します．ここで $\widetilde{f}_{12}$ は f_{12} を M の外では 0 に修正したものです．積分の変数変換を思い出すと，γ 上の積分は曲線の向き（始点と終点）を指定すればパラメータのとり方に依らないことがわかります．M 上の積分については右辺の重積分はフビニの定理により x_1, x_2 の積分の順序を変えても変化しないのですが，重積分に翻訳するときに $dx_2\wedge dx_1$ ではなく $dx_1\wedge dx_2$ を使って 2 形式を表示するというところがポイントです．この 2 形式の基底の選び方を平面の**向き付け**とよびます．

1 変数のときには区間の両端に符号をつけました（符号付きの点での 0 形式の積分は (2) 式で与えました）．これを高次元化して領域の境界に向きを定義します．平面には $dx_1\wedge dx_2$ で向きが与えられているとします．平面上に x_1, x_2 の座標軸を

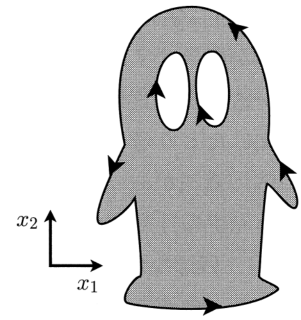


図 8　領域の境界の向き付け．

描いておきます．境界点の外向き法線ベクトルの方向に x_1 軸を回転させたときに x_2 軸の向く方向に境界を進むという向きを与えます．よく反時計回りに境界を進むという言い方をしますが，これは x_1 軸から反時計回りに 90 度回転させて x_2 軸を描く，という暗黙の了解があるからです．

6. ストークスの定理

1 ページをかけて準備をしたおかげで定理は簡単に述べることができます．

定理 1（ストークス）　M を平面のなかの有界領域で境界 ∂M は滑らかであるとする．このとき平面上の 1 形式 f に対して

$$\int_M df=\int_{\partial M} f \tag{3}$$

が成り立つ．

あとで少し説明しますが，ストークスの定理はより高い次元でも全く同じ形です．M が n 次元領域のときには f として $n-1$ 形式を考えます．

ちなみに「ストークスの定理」を最初に述べたのはストークスでありません：この定理はケルヴィン卿からストークスへの手紙の中に登場します．ストークス教授がケンブリッジ大学の数学コンクールの問題としてこの定理の証明を出題したのが名前の由来です．その問題を解いたのが当時まだ学生だったマクスウェルで，そのときの試験問題はマクスウェル財団のホームページで見ることができます（問題では 3 次元の場合を考えます）．

ストークスの定理は定式化の準備が大変ですが，証明は思いのほか簡単です．これは微分形式と向きという概念が積分の本質をとらえているからです．この定式化にたどり着くまでには数学者と物理学者の長い試行錯誤があったことを忘れてはいけません（加藤先生の「電磁気学と微積分」も参照してください）．残念ながら教養課程の講義では時間の制約もあり，最適な定義からはじめて最短路で定理に至ります．そのため定義の意味は分からないけどお経のように覚えておくと定理を証明するうちになんとなく納得するという時間差が生まれます；講義が分からなくても途中であきらめないでください．

最後に $\mathbb{R}^3$ の領域 M でのストークスの定理について説明します．3 変数の空間では 2 形式は

$$dx_1 \wedge dx_2, \quad dx_2 \wedge dx_3, \quad dx_3 \wedge dx_1$$

に関数を掛けた和として与えられます．その外微分は 3 形式で，例えば

$$\begin{aligned} d(f dx_1 \wedge dx_2) &= df \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (D_3 f) dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (D_3 f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

のように計算します．最後の変形では dx_1, dx_2, dx_3 の並べ替えを行っています．隣りどうしの入れ替えで符号が変わりますが，上の例では 2 回の入れ替えを行うので符号は変わりません．

M 上での 3 形式の積分を定義するために向き $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ を指定しておきます．あとは $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ を $dx_1 dx_2 dx_3$ におきかえて重積分をするだけです．境界 ∂M が滑らかな曲面になると仮定すると，陰関数定理により局所的には 2 変数の関数のグラフ，例えば，$x_3 = h(x_1, x_2)$ の形に表すことができます．このとき

$$dx_3 = (D_1 h) dx_1 + (D_2 h) dx_2$$

を使えば 2 形式は $dx_1 \wedge dx_2$ の関数倍として書くことができます．$dx_1 \wedge dx_2$ を $dx_1 dx_2$ におきかえて重積分をするわけですが，向きとして $\pm dx_1 \wedge dx_2$ のどちらを使うかが問題となります．これを指定

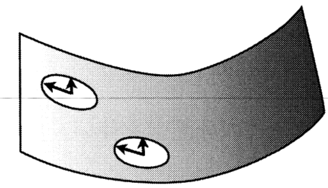


図 9　曲面に時計をおくには裏表を決める必要がある．

するのが ∂M の向き付けで，直感的には曲面の上に時計の文字盤を並べることと思えます（図 9）．境界 ∂M には M の外から時計を見ることを想定して時計を並べます．

ここまで準備をすると M を 3 次元の領域，f を 2 形式として (3) 式が成り立ちます．

微積分の教科書には，グリーンの定理，ガウスの発散定理などが登場しますが，これらはストークスの定理を座標と法線ベクトルをもちいて書き下したものです．定理の証明は微分形式を用いてエレガントにおこなって，具体的な計算が必要なときは教科書の公式を見るというのがおすすめです（試験の前だけは公式を覚えておいたほうが得策ですが）．この方針で書かれた教科書としてスピヴァックの教科書[1)]があります．私が初めてストークスの定理を勉強した本ですが25年ぶりに序文を読んでもその数学的簡明さに感心します．この小文もその影響をうけています．

参考文献

1)　M. スピヴァック:『多変数の解析学』, 東京書籍 (1972).

（ひらち・けんご，東京大学大学院数理科学研究科）

電磁気学と微積分

空間の微積分



加藤　光裕

1. スカラー場とベクトル場

大学に入って物理学を習うとき，多くの学生がはじめに戸惑うのが，ベクトル解析と呼ばれる数学的道具だ．高校時代のベクトルや関数や微積分の自然な拡張なのだが，空間的イメージをかなり豊かにしておかないとなかなか理解しづらい．特に電磁気学は，ベクトル解析を駆使するので，そこでつまずいてしまうと法則の意味するところを見失ってしまう．というわけで，できるだけ3次元空間のイメージを頭に思い描きながら，空間の微積分を理解してみよう．

空間を考えるときは，まず空間内の位置を指定する座標系を用意する．例えばあなたのいる部屋のどこか一隅を原点にとり，縦・横・高さのそれぞれの方向にどれだけ離れた場所にあなたの鼻の頭があるのかを指定してみる．つまり3個の数値の組 (x,y,z) で場所が指定される．これが空間座標だ．物理ではこれをしばしば，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて短く表記する．つまり (x,y,z) を成分表示としてもつ3次元ベクトルの名前が $\boldsymbol{r}$ というわけだ．(大学ではベクトルは矢印付きの文字よりも太字で表記されるほうが多い) $\boldsymbol{r}$ のイメージとしては，原点を始点とし，今考えている位置 (つまりあなたの鼻の頭) が終点の矢印を思い描けば良い．

さて，あなたの鼻の頭辺りの気温を考えてみよう．大抵部屋の中の温度は一定ではない．冷暖房の機器があったり，いれたてのコーヒーが目の前にあるかもしれないし，コンロでお湯を沸かしているかもしれない．あなたの鼻の頭の気温は，鼻の頭の位置における気温にすぎない．つまり温度は，部屋の中の場所ごとに変化し得る「関数」なのだ．そこで，それを関数 $T(x,y,z)$ と表そう．つまり3変数の関数だ．物理ではやはり手短に $T(\boldsymbol{r})$ と書いたりする．また，物理ではこのような空間の関数であるような量を「場」と呼んだりする．今の場合，変数は3個だが関数の値は1成分なので，特に**スカラー場**と呼ぶ．温度という大きさだけをもつスカラー量の関数だからだ．

あなたは，鼻の頭が気温の割には涼しく感じているかもしれない．それは鼻先をかすめて流れる風のせいかもしれない．大抵の場合，部屋の中で空気は絶えず動いている．空気の流れ，あるいは風の分布はまた場所の関数だ．鼻先という場所で風はどちらの方向にどのくらいの速さで流れているのかという情報は，大きさと方向をもつベクトル量だ．こんどは，さっきの温度と違い，場所の関数としてベクトルが定義される．これを $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ あるいは単に $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ と書く．これも場の一種である．ベクトルが空間の場所ごとに定義されているので，**ベクトル場**と呼ぶ．

これから考えるのは，こういったスカラー場やベクトル場といった空間の関数に対する微分・積分である．

微分は，関数の変化率，すなわち変数を変化させるときに，関数値自体がどう変化するのかの割合を意味する．場は空間の関数だから変数は3つある．変化の仕方も方向によって違う．あなたが立ち上がるときと体を傾けるときとでは，その鼻の頭の位置の変化の方向が違うため，その場所の気温の変化の仕方も違い得る．そこで，一つの変数だけを変化させ，他の変数を固定したときの関数値の変化率をその方向への偏微分と呼ぶ．例えば，変数 y と z を固定したまま，変数 x だけを変化させたときの温度 T の変化率

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{(T(x+h,y,z) - T(x,y,z))}{h}$$

を，x 方向への偏微分と呼ぶ．

さて，関数 T の3つの方向それぞれへの偏微分の組，$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$ は，3成分からなるベクトルでしかも空間の関数であるから，ベクトル場である．この T から作られたベクトル場を grad T と書き（グラディエント T と読む），T の**勾配**と呼ぶ．これをしばしば形式的に微分演算子のベクトル $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$（ナブラと呼ぶ）を用いて ∇T とも表す．

勾配を用いると，任意の微小な変位 $\delta \boldsymbol{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$ に対して，関数 T の変化分 $\delta T = \delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \delta y \frac{\partial T}{\partial y} + \delta z \frac{\partial T}{\partial z}$ は，$\delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla T$ というようにベクトルの内積の形でシンプルに表せる．今，T の値を変えないような変位 $\delta \boldsymbol{r}$ を考えると，そのとき $\delta T = \delta \boldsymbol{r} \cdot \nabla T = 0$ なので，この変位 $\delta \boldsymbol{r}$ と勾配ベクトルは直交することがわかる．すなわち，等温度面と呼ぶべき温度一定の面に対して勾配ベクトルは常に垂直であることが言える．言い換えれば勾配ベクトルに沿った方向が，関数 T が最も大きく変化する方向だということである．なお，スカラー場に対してその勾配はベクトル場であるが，任意のベクトル場がスカラー場の勾配で表せるとは限らない．

次に，あなたの部屋の熱の流れを考えてみよう．温度の高いところから温度の低いところへと

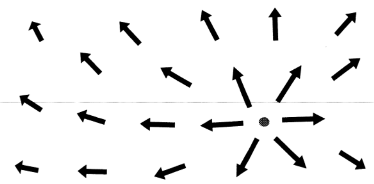


図1　ベクトル場とわき出し口．

熱は流れる．流れる方向の情報があるのでこれはベクトルで表される．熱の流れのベクトル $\boldsymbol{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ が，温度勾配に比例するという簡単な場合を考えてみると，温度というスカラー場から作られる勾配ベクトルに比例するということになり，比例係数を k とすると $\boldsymbol{Q} = -k\,\mathrm{grad}T = -k\nabla T$ と表せる．マイナス符号は温度の低いほうへ流れるという向きを決めている．

今，部屋の温度分布は定常である（時間的変化がない）としよう．このとき，部屋のほとんどの場所では流れてきた熱はどこかへ同じだけまた流れていき，その場所の温度を変えない状況が実現されている．熱が流れてくるもとを辿っていくと，コンロの火などの熱源にたどり着く．そこでは絶えず熱が発生し周りに伝わっていく．熱の流れのベクトルで考えると，それぞれの場所のベクトルの始点のほうへ始点のほうへと後戻りしていって，それ以上戻れない場所になっているはずだ．つまり熱源からは，出て行く向きのベクトルばかり集まっている（図 1）．この様子を特徴付けるものが**発散**と呼ばれるベクトル場の微分の一種である．ベクトル場 $\boldsymbol{Q}$ の発散 div $\boldsymbol{Q}$ は，ベクトル的な微分演算子ナブラと $\boldsymbol{Q}$ との内積のような形で $\mathrm{div}\,\boldsymbol{Q} = \nabla \cdot \boldsymbol{Q} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z}$ と定義される．この div $\boldsymbol{Q}$（ダイヴァージェンス $\boldsymbol{Q}$ と読む）がゼロではない場所が熱の流れのわき出し口，つまり熱源なのである．

再びあなたの鼻先を流れる風，空気の流れに注目しよう．部屋が閉め切られているとすると，熱源で暖められて上昇した空気は壁面で冷やされるなどして下降するなど対流を作り，部屋の中をゆっくり循環する．どこかには空気の流れの渦

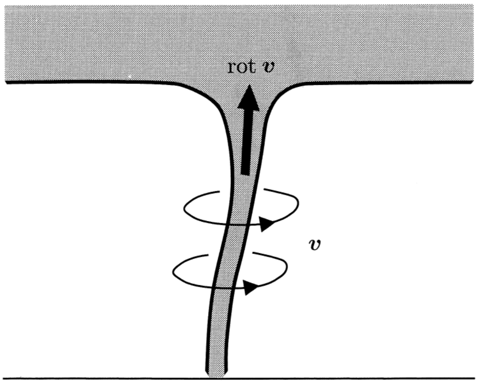


図2 竜巻の風の流れと渦の軸．

ができているかもしれない．この渦巻く様子を特徴付けるものが，空気の流れのベクトル $\boldsymbol{v}$ から作られる**回転**と呼ばれるベクトル場 rot $\boldsymbol{v}$ である．これは，ナブラと外積する形 rot $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$ で定義される．

ベクトル rot $\boldsymbol{v}$（ローテーション $\boldsymbol{v}$ と読む）は，元のベクトル $\boldsymbol{v}$ とは一般に違った方向を向いている．直感的には流れ $\boldsymbol{v}$ によって作られている渦巻きの軸方向を向いている．部屋の中の風程度では想像しにくいので，もっと強烈な竜巻を思い浮かべてもらうと良い（図 2）．その場合は渦巻きの軸は天に向かって垂直に屹立し，風自体はその軸の周りを旋回している．つまりこの軸の周りの同心円の接線方向が $\boldsymbol{v}$ の方向であり，rot $\boldsymbol{v}$ の方向は天を向く軸に平行なのである．

3 次元空間の場に対する微分としては勾配（grad），発散（div），回転（rot）の 3 つを理解すれば万全だ．いずれもナブラ演算子を用いて定義されたことに注意しよう．

3. 静電場と磁束密度

本題の電磁気学に入れば，そこでも様々な場が現れる．まずは電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (E_x(x,y,z), E_y(x,y,z), E_z(x,y,z))$ であるが，これは 3 成分のベクトル場である．電荷を電場の中に持ち込むとこのベクトルに比例した力を受けるので，大きさと方向を持つ量であることがわかる．簡単な場合として，時間的に変化しないような電場（静電場と呼ぶ）を考えると，これは電位あるいは静電ポテンシャルと呼ばれるスカラー場 $\phi(\boldsymbol{r})$ $(= \phi(x,y,z))$ が存在して，

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\ \phi$$

と表される．つまり，電位の減少する方向へ電場のベクトルが向いているのである．

電場の様子は，電気力線を用いれば目に見える形で理解できる．電気力線は，その接線が常に電場の方向を向いているような曲線である．あたかも水の流れのようなものをその曲線に沿って想像してみるとよい．電気力線の場合，流れの源は電荷である．従って，空間中の電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ で表すと，前述した発散という量を電場に関して適用したものが，この電荷密度に比例しているというわけだ．すなわち，比例定数を $1/\epsilon_0$ と書いて，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$$

というガウスの法則が成立する．

磁場も同様に磁力線あるいは磁束線を考えることで同様な可視化ができる．磁束密度と呼ばれるベクトル場 $\boldsymbol{B}$ が電場 $\boldsymbol{E}$ にちょうど対応している．磁束密度の場合は，電荷に対応する磁荷というものが単独では存在しないため，ガウスの法則に対応する関係式は，

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$

となってしまう．$\boldsymbol{B}$ に対する源はむしろ電流である．電流があればその周りに渦を巻くように磁場ができる．この関係を表すには，前述した回転という量を使う．電流密度を $\boldsymbol{j}$（電流は電荷の流れなので，これ自体もベクトル場である）とすると，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

となる．これはアンペールの法則と呼ばれていて，μ_0 は比例定数である．前の例で対比すれば $\boldsymbol{j}$ が竜巻の軸方向に，$\boldsymbol{B}$ がその周りの渦巻く風の流れの方向を向いているのである．

電場に対する回転はどうなっているのだろうか．今考えている静電場（時間によって変化しない電場）の場合には，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0$$

となっている．

4. 場の積分

高校で習った1変数関数の積分は，その積分区間を微小に区切って，各微小区間の長さとその区間での代表点での関数値の積をすべての微小区間について和をとったものを考え，区間の長さを零にもっていく極限として定義されていた．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta x \to 0} \sum_i f(x_i)\,\delta x.$$

3次元空間内では，その中の様々な部分空間，例えば1次元的な曲線，2次元的な曲面，3次元的な領域などが考えられる．どの場合も，基本的な考え方は1変数関数の場合と同じである．各図形を微小な部分に分割して関数の代表値で近似して和をとり，最後に分割を無限小にする極限をとる．

1次元的な曲線 C 上でスカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ つまり1成分関数を積分する場合，まず曲線 C を微小な部分に分割する．各部分の長さを δs とし，各部分，例えば番号付けをした i 番目の部分上で1つ代表点 $\boldsymbol{r}_i$ を選び，そこでの被積分関数の値を $f(\boldsymbol{r}_i)$ とすると，

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds = \lim_{\delta s \to 0} \sum_i f(\boldsymbol{r}_i)\,\delta s$$

と定義すればよい．特によく使うのは，ベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対して曲線の接線方向への射影を積分するものである．曲線の接線方向を向いた単位長さのベクトルを $\boldsymbol{t}$ として，$\boldsymbol{t}ds$ を $d\boldsymbol{r}$ と書いて線要素と呼び，

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{t})\,ds$$

などと表し，しばしばベクトル $\boldsymbol{A}$ の曲線 C 上での線積分と呼ぶ（図3）．

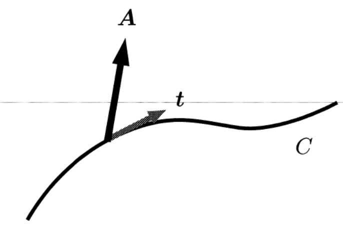


図3　ベクトル $\boldsymbol{A}$ の曲線 C 上での線積分．

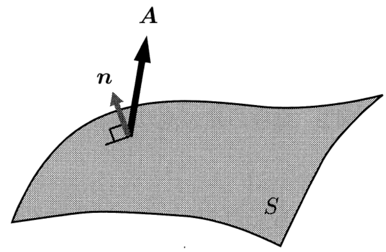


図4　ベクトル $\boldsymbol{A}$ の曲面 S 上での面積分．

2次元的な曲面 S 上の積分の場合も，やはり曲面 S を微小な部分に分割し，各微小面積 δS とその中の代表点での被積分関数の値 $f(\boldsymbol{r}_i)$ を用いて，

$$\int_S f(\boldsymbol{r})\,dS = \lim_{\delta S \to 0} \sum_i f(\boldsymbol{r}_i)\,\delta S$$

と定義すれば良い．ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対しては，曲面上の各点における法線（接平面に垂直な方向）への射影を積分することがよくあり，その場合法線ベクトル（法線方向への単位ベクトル）を $\boldsymbol{n}$ とすると，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$ を面積要素と呼び，

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n})\,dS$$

と書いて，面積分と呼んでいる（図4）．

3次元的な領域 V での積分は，もはや説明はいらないであろうが，やはり V を微小部分に分割してこれまでと同様に，

$$\int_V f(\boldsymbol{r})\,dV = \lim_{\delta V \to 0} \sum_i f(\boldsymbol{r}_i)\,\delta V$$

と定義する．δV が微小体積である．

5. 積分形の法則

再び電磁気学に戻ろう．前述のように，静電場 $\boldsymbol{E}$ が電位 ϕ を微分して得られるのであれば，その

逆つまり電場の積分によって電位が得られるはずである．それはどのような積分なのか．答えは線積分である．つまり，空間中に電位の基準点（通常アースされている場所や無限遠点）から電位を決定したい場所まである経路を通ってつなぐ曲線を考える．曲線は1次元なので1変数（例えば u としよう）の関数として $(x(u), y(u), z(u)) = \boldsymbol{r}(u)$ を与えて，基準点を $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(0)$，考えている点を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(1)$ となるようにとればよい．これはベクトル関数（3成分1変数）である．このとき，

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) \equiv \phi(x, y, z) &= -\int_0^1 \boldsymbol{E} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{du} du \\ &= -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

と書くことができる．ここで $\frac{d\boldsymbol{r}}{du}$ は曲線の接線方向を向くベクトルであり，$\frac{d\boldsymbol{r}}{du} du \, (= \boldsymbol{t} ds = d\boldsymbol{r})$ は，曲線の線要素になっている．

線積分が1次元的な曲線に沿っての積分であるのに対し，2次元的な曲面の上での積分が面積分である．線要素と同じように，曲面の面要素あるいは面積要素を微小な面積 dS と法線ベクトル $\boldsymbol{n}$（その点での接平面に垂直な方向ベクトル）とで，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$ と定義すると，例えば曲面 S 上での電場の面積分ならば，$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S}$ と表せる．電場を水の流れのベクトルに例えれば，曲面を横切って流れ出てくる流量に相当するのがこの積分である．つまり，電気力線がどのくらい曲面から出てきているかを測っている．S が閉曲面のとき，水の場合なら，内部に水がわき出してくる源があれば，この積分はゼロではない．電場の場合には電気力線の源は，電荷である．従って，この積分は閉曲面に囲まれた内部の電荷の総量 Q に比例する（図5）．すなわち，

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q.$$

これが，ガウスの法則の積分による表現である．一方，左辺の積分は，この閉曲面 S の内部の領域 V における発散の体積積分に等しい．

$$\int_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div} \boldsymbol{E} \, dV.$$

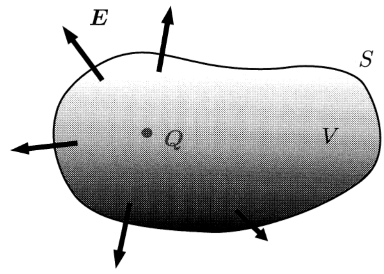


図5　ガウスの法則．

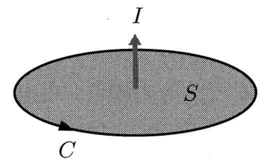


図6　アンペールの法則．

ここで，右辺の dV は体積要素である．この関係式は一般のベクトル場について成り立ち，ガウスの定理と呼ばれている（物理法則であるガウスの法則と混同しないこと）．この式と，ガウスの法則の積分形とを組み合わせると，電荷の総量が電荷密度の体積積分であること $\int_V \rho \, dV = Q$ を考慮すれば，発散を用いた微分形のガウスの法則が導かれることがわかるであろう．

一方，磁束密度 B のほうは，電流の周りに回転するような向きに発生すると述べたが，それならば，電流の周りを1周するような閉じた曲線を考え，それに沿って線積分してやれば，常に接線方向を場が向いているため零でない値を与えるはずである．実際，積分路に囲まれた面を貫く電流の総和を I とすると，

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 I$$

が成り立ち，積分形のアンペールの法則を与える（図6）．ここで積分記号に丸印が付けられているのは，閉じた経路であること（輪のように端がなく元に戻ってくる経路）を表している．これも，ガウスの法則のときのように，ストークスの定理という数学的関係式（閉じた曲線 C に囲まれた面を S として）

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathrm{rot} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

と電流密度 $\boldsymbol{j}$ の S での面積分が電流 I を与えること $\int_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = I$ を使えば，前述の微分形のアンペールの法則に帰着することがわかる．

6. 拡張

ここまでの話では，時間的変化のない場合を考えてきたが，実際には，場は空間座標だけでなく時間 t にも依存する 4 変数関数であり，その法則も時間依存性が加わってくる．例えば，磁場が時間的に変動すると，その周りに電場が誘導される（ファラデーの電磁誘導の法則）．従って，前に書いた $\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0$ なる関係式は，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

と修正される．また，逆に電場が時間的に変化すれば，電流と同様に磁場を生じさせる．従って，アンペールの法則も

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

と修正される（アンペール–マクスウェルの法則）．これら 2 つの方程式と，電場と磁場それぞれに関するガウスの法則を合わせたものが，マクスウェルの方程式と呼ばれ，電磁気学における基本方程式となっているのだ．

マクスウェルの方程式たちを組み合わせることで，電場と磁場が互いの時間変化によって誘導されながら，空間中を伝わっていく様子を導き出すことができる．それが，電磁波であり，光や電波，X 線などは波長が違うだけで実体はすべてこの電磁波なのである．

本稿では，電磁気学に現れる空間中の微分や積分を中心に解説したが，はじめに述べた例のような熱流，空気や水のような流体の流れなどを扱う流体力学など，その応用範囲は極めて広い．実は，3 次元空間にとどまらず，様々な次元の空間におけるテンソル量に関して拡張していける．それを見通しよく行うには，微分形式やサイクル，バウンダリーといった数学的概念を導入していくと便利であり，どんどんと奥の深い話につながっていく．電磁場くらいで驚いていてはいけないのである．

（かとう・みつひろ，東京大学大学院総合文化研究科）

数値計算と微積分



齊藤 宣一

1. はじめに—微分と差分

関数 $f(x)$ について，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき，その極限値を $f'(a)$ で表し，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数あるいは微分というのでした．例えば，$f(x)=x^3$ と $a=1$ に対して，極限を取る前の分数

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

の値を計算してみると，$h=0.1$ のときは 3.31，$h=0.01$ のときは 3.0301，$h=0.001$ のときは 3.003 となり，$h\to 0$ としたときに，3 に近づくことが予想できます．もっとも，私たちはそのような予想を経なくとも，$f'(1)=3\cdot 1^2=3$ であることを知っています．しかし，(1) の分数は，微分の定義の一部であると同時に，微分の近似値を得るための公式でもあることを，改めて理解して頂けたと思います．実際，(1) のことを，$f'(a)$ の前進差分近似あるいは前進差分商と呼びます．

図形的に考えると，(1) は $f(x)$ の a における接線の傾き $f'(a)$ を，$(a,f(a))$ と $(a+h,f(a+h))$ を通る直線の傾きで近似していることになります．同様に，$f'(a)$ を，$(a-h,f(a-h))$ と $(a,f(a))$ を通る直線の傾きで近似して，

$$\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

という近似も得ます．これは，$f'(a)$ の後退差分近似（後退差分商）です．また，$(a-h/2,f(a-h/2))$ と $(a+h/2,f(a+h/2))$ を通る直線の傾きで近似して，中心差分近似（中心差分商）

$$\frac{f(a+h/2)-f(a-h/2)}{h}$$

を得ます．

今までは，$f'(a)$ の近似値を考えてきましたが，$f''(a)$ についても同様の近似値があります．まず，中心差分を適用して

$$f''(a)\approx\frac{f'(a+h/2)-f'(a-h/2)}{h}$$

ですが，さらに，中心差分を適用して

$$f'(a+h/2)\approx\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$
$$f'(a-h/2)\approx\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

なので，結果として $f''(a)$ の近似として，

$$\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$$

を得ます．これを，2 階中心差分近似（中心差分商）と呼びます．

この記事では，これら微分ならぬ差分の数学を紹介したいと思います．ただし，差分そのものが作る世界[5]というよりは，微分方程式の数値解法という話題を通じて，差分と微分の相互関係を例に，応用解析学の一端の紹介を試みます．まずは，数値解法の動機の確認から始めましょう．

2. 現象の解析と微分方程式

微積分の大きな役割の一つは，現象を記述し解析するための言語や手段を提供することにあります．その典型である微分方程式は，ニュートンによる惑星運動の解析以来，私たちが現象の本質を知り未来へ役立てるための欠かせない道具です．

新幹線の先端の形状は流体力学に基づいて設計されています．すなわち，できるだけ抵抗が小さくなるように，あるいは，トンネルに進入した際になるだけ騒音を抑えるように設計されているのです．その設計の際には，模型による実験が基本的ですが，同時にコンピュータによるシミュレーションも重要な役割を果たします．私たちの身の回りに存在するほとんどの気体と液体の運動はナヴィエ・ストークス方程式で記述できます．これは，位置 (x, y, z) と時間 t を独立変数とし，速度ベクトル場 (u, v, w) と圧力 p を未知関数とする非線形連立偏微分方程式です．したがって，コンピュータ内で新幹線等の形状を再現し，いろいろな条件下でナヴィエ・ストークス方程式を解いてやれば，コンピュータ内で新幹線の周りの空気の流れを実験できてしまうことになります．ほんの少し形状を変化させる場合に，実際の実験とコンピュータシミュレーションのどちらが安価であるかは，素人でも想像がつくと思います．ところが問題はナヴィエ・ストークス方程式です．この方程式は，誕生からすでに100年以上が経過していますが，現在のところ，それが解けるか否かという最も基本的な問題ですら未解決です．実際，それはクレイ数学研究所のミレニアム賞7問題のうちの一つとして100万ドル（約9千万円）の賞金がかかっています[2)]．ただしこれは，ある関数空間の中に方程式の解が存在するかという抽象的な問題のみが賞の対象となっています．数学では，このように，解の存在が証明できることを，「方程式が解ける」と表現してしまいますし，多くの解析学者の努力もこの意味で方程式を解くことに集中しています．しかし，応用家（この場合設計者）が必要なのは，具体的な解であり，空気の流れを理解するのに必要な具体的な数値です．そこで登場するのが数値解法という考え方です．実際のところ，現象を記述する多くの偏微分方程式を，実用的な意味で解くほとんど唯一の方法が数値解法です．

3. 熱伝導方程式とフーリエ解析

ナヴィエ・ストークス方程式で説明したほうが，説得力があるかも知れませんが，さすがに複雑なので，もっと簡単な熱伝導方程式を例にとります．長さ1の針金が，x 軸の区間 $[0, 1]$ 上におかれているとき，針金の位置 x，時刻 t における温度 $u = u(x, t)$ は熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 1,\ t > 0) \qquad (2)$$

に従うことが知られています．α は，針金の材質等から決まる正定数で，熱の伝わりやすさを表します．今後の議論では α の値は本質的でないので，$\alpha = 1$ とします．(2) に，針金の両端を温度0で保つことを意味する条件（境界条件）

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \qquad (t > 0) \qquad (3)$$

を課します．また，時刻 $t = 0$ での温度分布 $v(x)$ は既知であるとします（初期条件）．すなわち，

$$u(x, 0) = v(x). \qquad (4)$$

これら (2)–(4) を満たす関数 $u(x, t)$ は，フーリエ級数を応用したフーリエの方法により求めることができます．フーリエ級数は，理工学系の学部でなら，2，3年生で学ぶのですが，ここでは後の説明の便宜のため，フーリエの方法を簡単に復習しておきます．まず，$u(x, t) = \varphi(x)\eta(t)$ の形の関数で，(2), (3) を満たすものを探します．(3) より，$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ はすぐ出ます．一方，方程式より

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\eta'(t)}{\eta(t)}$$

ですが，左辺は t に依らない関数，右辺は x に依らない関数なので，結局，左辺右辺ともに x にも

t にも依らないことがわかります．したがって，その量を $-\mu$ とおいて，

$$\varphi''(x) = -\mu\varphi(x), \quad \eta'(t) = -\mu\eta(t)$$

を得ます．$\varphi(x)$ の方程式は単振動の微分方程式ですが，μ も未知数であり，したがって，固有値問題になっています．境界条件の下では，

$$\varphi_m(x) = \sqrt{2}\sin(m\pi x), \quad \mu_m = (m\pi)^2$$

と無数に解があります．sin の前の係数 $\sqrt{2}$ は，

$$\int_0^1 \varphi_m(x)\varphi_l(x)\,dx = \begin{cases} 1 & (m=l) \\ 0 & (m \neq l) \end{cases} \tag{5}$$

となるように取ったもので，それ以上の深い意味はありません．このとき，各 m に対して，$\eta_m(t) = e^{-(m\pi)^2 t}$ が $\eta(t)$ の方程式の解となります．これらの線形結合

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m e^{-m^2\pi^2 t}\varphi_m(x) \tag{6}$$

は，(2) と (3) を満たしているのですから，あとは初期条件 (4) を満たすように係数 α_m を求めれば良いわけです．実際，$t=0$ として，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m\varphi_m(x) = v(x) \tag{7}$$

ですが，この両辺に $\varphi_l(x)$ をかけて，x について $[0,1]$ で積分すると，(5) を用いて，

$$\alpha_m = \int_0^1 v(x)\varphi_m(x)\,dx \tag{8}$$

を得ます（記号は，l から m に取り換えました）．すなわち，α_m は，$v(x)$ を (7) のようにフーリエ正弦級数展開した際のフーリエ係数に他なりません．これで，求めたい (2)–(4) の解が，(6) の形で求まりました．なお，(6) は，関数列の無限和なので，その数学的な意味を明確にするには，解析学についてのそれなりの知識が必要になりますが，ここではそこまでは触れません．

さて，(7) の両辺を自乗して積分すると，(5) を用いて，パーセバルの等式

$$\int_0^1 v(x)^2\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2$$

を得ます．一方，(6) についても，同様に考えると，

$$\int_0^1 u(x,t)^2\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2 e^{-2(m\pi)^2 t}$$

なので，$0 < e^{-2(m\pi)^2 t} \leq 1$ という単純な事実を使うと，

$$\int_0^1 u(x,t)^2\,dx \leq \int_0^1 v(x)^2\,dx \tag{9}$$

という関係を得ます．これは，解の初期値に対する安定性を意味します．

4. 熱伝導方程式と陽的差分スキーム

(6) のように解が求まったので，目的達成のように思うかも知れませんが，私たちのそもそもの目標は，方程式から現象についての様々な情報を得ることにあります．(6) からもいろいろなことがわかりますが，解の時間変化の具体的な様子をイメージすることは難しそうです．

そこで，全く違うアイデアで，(2)–(4) を解く，ただし差分法により数値的に解くということを考えてみます．そのために，N を正の整数として，$h = \frac{1}{N+1}$ とおき，$x_i = ih$ と定義します．また，τ を正の定数として，$t_n = n\tau$ と定義します．そして，xt 平面上に格子点の集合 $\{(x_i, t_n) \mid 0 \leq i \leq N+1,\ n \geq 0\}$ を考え，各格子点 (x_i, t_n) 上での $u(x,t)$ の近似値 $u_{i,n}$ を求めることを考えましょう．まず，1 節の考察を思い出して，(x_i, t_n) における u_t, u_{xx} の値を，それぞれ，前進差分商，2 階中心差分商で近似すると，

$$\frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{\tau} = \frac{u_{i-1,n} - 2u_{i,n} + u_{i+1,n}}{h^2}$$

を得ます．これは，$\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ とおいて

$$u_{i,n+1} = (1-2\lambda)u_{i,n} + \lambda(u_{i-1,n} + u_{i+1,n}) \tag{10}$$

と書き直せます．ただし，境界条件より，$u_{0,n} =$

$u_{N+1,n} = 0$ とします．初期条件より，$u_{i,0} = v(x_i)$ の値が既知なので，$\{u_{i,0}\} \to \{u_{i,1}\} \to \{u_{i,2}\} \to \cdots$ と逐次的に $\{u_{i,n}\}$ を計算できます．このような解法を陽的差分法スキームあるいは陽解法と呼びます．近似であることを我慢しなければなりませんが，得られるものは具体的な数値であり，それを比較検討したり，グラフ化したりは，むしろ簡単に行えます．このような微分方程式の解法を数値解法と言います．実際，陽解法は，表計算ソフトを使ってコンピュータ上で簡単に実行できますし，プログラミングをかじったことのある人なら，プログラムを書くのも容易です．例として，$v(x) = x\sin^2(3\pi x)$, $N = 127$, $\lambda = 0.49$ として計算し見ると図 1 のようになります． 初期値にあった「3 つの山」が時間の経過とともに一様に滑らかになっていく様子が，よくわかります．ところが，$v(x) = \min\{x, 1-x\}$, $N = 31$, $\lambda = 0.51$ として，計算してみると，図 2 のようになってしまいます．すなわち，解にギザギザの山が生じ，それが時間の経過とととともに鋭く大きくなっていき，やがては発散してしまいます．一方で，(9) より，熱伝導方程式の解は，$t \to \infty$ で発散しないはずです．このようなことが起こる原因は，初期関数の違いではなく，λ の大きさにあるのですが，それは後の節で詳しく説明しましょう．

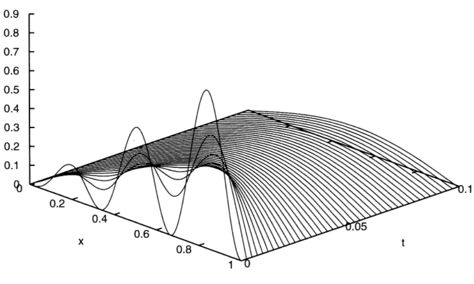


図 1　熱伝導方程式の解（$\lambda = 0.49$）．

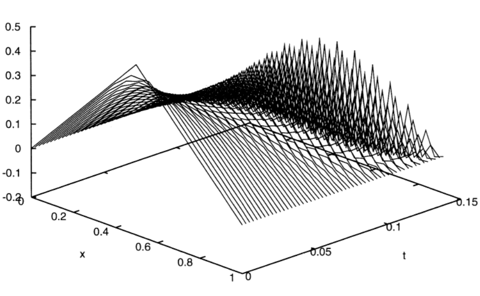


図 2　熱伝導方程式の解（$\lambda = 0.51$）．

5. 陰的差分スキームと連立一次方程式

差分近似の導き方は一通りではありません．別の方法も導いてみましょう．実際，(x_i, t_n) における u_t の値を前進差分商でなく後退差分商で近似すると，

$$\frac{u_{i,n} - u_{i,n-1}}{\tau} = \frac{u_{i-1,n} - 2u_{i,n} + u_{i+1,n}}{h^2}$$

を得ます．境界条件と初期条件は前と同じです．この場合，行列 A とベクトル $\boldsymbol{U}_n$ を

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \cdots & \cdots & \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_n = \begin{bmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ \vdots \\ u_{N,n} \end{bmatrix}$$

と定義すると，

$$(I + \lambda A)\boldsymbol{U}_n = \boldsymbol{U}_{n-1} \tag{11}$$

と書き直せます．初期条件より $\boldsymbol{U}_0$ は既知なので，連立一次方程式 (11) を解くことで，$\boldsymbol{U}_1 \to \boldsymbol{U}_2 \to \cdots$ が順に求まります．このように，近似解を算出する際に連立一次方程式を経由する方法を陰的差分スキームあるいは陰解法と呼びます．それに対して，連立一次方程式を経由しない方法を陽解法と呼んだのでした．また，陰解法と陽解法を平均してできる差分スキーム（クランク・ニコルソン法）も考えられます．さて，(11) を用いて実際に計算をしてみると，今度はすべての $\lambda > 0$ に対して良好な結果が得られます．

ここで，N 次の連立一次方程式 $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解法について少し補足説明をしておきます．連立一次方程式の解法ではクラメールの公式

$$x_1 = \frac{\det T_1}{\det T}, \quad \ldots \quad, x_N = \frac{\det T_n}{\det T}$$

が有名です．ただし，T_i は T の第 i 列目を $\boldsymbol{b}$ で取り換えてできる行列です．これは数学的には文句の付けようのない方法ですが，実用的ではあり

ません．実際，良い近似を得るために，N はある程度大きい整数としましょう．このとき，N 次正方行列の行列式を計算するのに必要な乗除算の回数は約 $2N!$ 回程度で，したがって，クラメールの公式で解を求める際に必要な乗除算の回数は約 $2(N+1)!$ 回程度になります．コンピュータの中では，実数は浮動小数点数という特別な形をした有理数の集合で近似的に表現され，四則演算等が行われます．現在の非常に速い並列コンピュータは，1 秒間に約 10^{12} 回の浮動小数点演算を行えますから，$N=30$ のときには，約 1.65×10^{22} 秒 $\approx 5.22\times10^{14}$ 年かかることになります．ビックバンが起こったのが約 10^{10} 年前とされているそうです．いつになったら計算が終わるのでしょうか？ しかもこの見積もりでは，乗除算しか考慮に入れていません．実のところ，(11) のような連立一次方程式を解くの際は，ガウスの消去法が実用的です．特に，係数行列の 3 重対角性に着目すれば，非常に効率の良い計算方法を考えることができます[1)]．

6. 差分スキームのフーリエ解析

前節までの考察で，熱伝導方程式の数値解を具体的に求める方法はわかりました．次に，その差分スキーム自体を考察してみましょう．特に，(9) の形の安定性について考えてみます．そのために，差分スキームの解をある連続関数で表現し直します．熱伝導方程式と同じようにフーリエの方法で考察を進めましょう．まず，陽解法を考えます．$u_{i,n}=\varphi_i\eta_n$ の形で，(10) と境界条件を満たすものを探します．微分方程式の場合と全く同様に考えて，

$$-\frac{\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1}}{h^2}=\mu\varphi_i \quad (1\le i\le N),$$
$$-\frac{\eta_{n+1}-\eta_n}{\tau}=\mu\eta_n \quad (n\ge 0)$$

を得ます．また境界条件より $\varphi_0=\varphi_{N+1}=0$ です．すなわち，これらを満たすような φ_i と η_n を求めるわけです．当面のところ m は固定してお

いて，i についての数列 $\psi_i = \varphi_m(x_i)$ を考えると，これは

$$-\frac{\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}}{h^2} = \rho_m \psi_i$$

を満たします（高等学校レベルの三角関数の練習問題！）．ただし，

$$\rho_m = \rho_m(h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{m\pi h}{2}\right)$$

と置いています．したがって，$\varphi_i = \psi_i, \mu = \rho_m$ とすれば良いわけです．一方で，この ρ_m を使えば，$\eta_n = (1 - \tau\rho_m)^n$ と書けるので，これらを重ね合わせて

$$u_{i,n} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m (1 - \tau\rho_m)^n \psi_i$$

の形の数列が，(10) と境界条件を満たすことがわかります．したがって，特に，

$$U(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (1 - \tau\rho_m)^{\frac{t}{\tau}} \varphi_m(x) \quad (12)$$

で定義される連続関数は，$n \geq 1$ のとき，(x_i, t_n) において $u_{i,n}$ と一致します．さらに $t = 0$ とすると，α_m の定義（あるいは (8)）より初期条件も満たしています．すなわち，すべての格子点上で $U(x_i, t_n) = u_{i,n}$ となります．ここで，

$$|1 - \tau\rho_m| \leq 1 \quad (m \geq 1) \qquad (13)$$

であれば，(9) の導出と全く同様に，

$$\int_0^1 U(x,t)^2\, dx \leq \int_0^1 v(x)^2\, dx \qquad (14)$$

が成り立つことになります．(13) は，

$$0 \leq \tau\frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{m\pi h}{2}\right) \leq 2$$

と同値ですが，真ん中の項は $4\tau h^{-2}$ よりも小さいので，したがって，条件 $\lambda \leq 1/2$ を仮定すれば，(13) すなわち (14) が得られることがわかります．このことは，条件 $\lambda \leq 1/2$ の下では，差分解は発散しないことを意味しており，4 節の計算結果と辻褄が合っています．

陰解法についても同様に考えると，

$$U(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (1 + \tau\rho_m)^{-\frac{t}{\tau}} \varphi_m(x) \quad (15)$$

を得ます．しかし，今度は，

$$\left|(1 + \tau\rho_m)^{-1}\right| \leq 1$$

が自動的に成立しているので，λ に対して何の条件も課さなくても (14) が導かれ，差分解は発散しません．このように，陰解法のほうが陽解法よりも安定性に関して有利になります．

7. 指数関数の有理関数近似

さて，(12) や (15) のような差分解の表現と，元の熱伝導方程式の解の表現をよく見比べてみると，大変良く似ていますが，一箇所違いがあります．すなわち，指数関数 $e^{-(m\pi)^2 t}$ のところが，陽解法では $(1 - \tau\rho_m)^{\frac{t}{\tau}}$ と，陰解法では $(1 + \tau\rho_m)^{-\frac{t}{\tau}}$ となっているのです．$h \to 0$ のとき，$\rho_m \to (m\pi)^2$ なので，時間変数の差分化は，$z = (m\pi)^2\tau$ に対して，陽解法では e^{-z} を $1 - z$ と，陰解法では $(1 + z)^{-1}$ と近似していることに対応していると考えられます．

ここで少し唐突ですが，z を複素変数として，複素関数を考えましょう．整数 $n, m \geq 0$ に対して，

$$R_{nm}(z) = \frac{P_{nm}(z)}{Q_{nm}(z)}$$

で定義される有理関数を，複素関数論では，指数関数 e^{-z} のパデ有理関数近似といいます．ただし，

$$P_{nm}(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(n+m-j)!n!}{(n+m)!j!(n-j)!}(-z)^j,$$

$$Q_{nm}(z) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(n+m-j)!m!}{(n+m)!j!(m-j)!}z^j$$

です．e^{-z} の近似と呼ばれる所以は，

$$|e^{-z} - R_{nm}(z)| \leq C|z|^{n+m+1} \quad (|z| \text{ が十分小})$$

となるところにあります（$|z|$ は複素数の絶対値を表します）．$R_{nm}(z)$ のはじめの数個を書き出してみると，次のようになります．

	$m=0$	$m=1$
$n=0$	1	$1-z$
$n=1$	$\frac{1}{1+z}$	$\frac{2-z}{2+z}$

すなわち，熱伝導方程式における時間変数の差分化は，陽解法，陰解法ともに e^{-z} のパデ近似に対応しているわけです．そうすると，残りの $(2-z)/(2+z)$ を用いたときの近似がどうなっているのかを知りたくなるのが人情です．実は，クランク・ニコルソン法による差分近似がこの関数に対応した近似になっています．

8. さいごに

ここまでやや細かい計算に付き合って頂いたのは，数値解法を考察する際には，元の微分方程式に対する解析を十分に理解するのが重要であることを，具体例を通じて体感してほしかったためです．数値解法は四則演算のみで表現され，微分積分は出てこないのだから，微分積分を知らなくても良いというわけではないのです．また，微分方程式の近似を考えていると思ったら，線形代数が出てきたり，複素関数論が出てきたりということも，ほんの少しですが体験して頂けたと思います．数値解法という実用性の視点からも，数学の多くの分野が有機的に関係し合い，豊かな世界を作っていることを感じることは可能なのです．微分方程式の数値解法により興味を持たれた読者の方には，文献 1, 3, 4) の一読をお薦めします．

参考文献

1) 菊地文雄，山本昌宏：『微分方程式と計算機演習』，山海堂，(1991).
2) 一松信（他）：『数学七つの未解決問題—あなたも 100 万ドルにチャレンジしよう！』，森北出版，(2002).
3) 山口昌哉編：『数値解析と非線型現象』，日本評論社，(1996).
4) 山口昌哉編：『非線型の現象と解析』，日本評論社，(1996).
5) 特集：「差分学の世紀—デジタル世界の未来と可能性—」数理科学，2003 年 9 月号.

（さいとう・のりかず，東京大学大学院数理科学研究科）

確率論からのルベーグ積分入門

概観のための一つの手段

乙部 厳己

1. はじめに

積分法は，錐体の体積を求めるためにエウドクソスによって始められアルキメデスによって徹底的に議論された「取り尽くし法」に始まるといってよいでしょう．その後の長い数学の発展の歴史を経て，20 世紀初頭に完成したのが本稿で取り扱うルベーグ積分です．その発展の歴史は他の文献[5, 7]に譲るとして，この理論は主に測度概念と積分概念という 2 つの概念が協調して成立しています．通常ルベーグ積分論は理工系大学の（数学科でも）3 年次程度で扱われるもので，いったん教科書を開くと実に厳めしい構成のものが多く，ひるんでしまう人も多いようです．そこでは低年次で準備してきた概念が駆使され，まさに数学における積み重ねとしての学問的側面を体現しているかのようです．しかも現代ではルベーグ積分論自身はその先の豊かな解析学のための準備的側面が強く，例えばルベーグ積分を学んでも具体的に積分できる関数はほとんど増えないため，その講義内での達成感をあまり感じられずに解析学そのものへの興味を失うことすらあるようです．一方ルベーグ積分をしっかり勉強すると数学全般，特に解析学的な基礎力が大いに身につくので，それをきっかけに解析学の道に進む人もいます．そのような点ではルベーグ積分論は数学学習の 1 つの分岐点と言っても過言ではないと思いますが，最初に述べた測度および積分という 2 つの概念について，それらが共に素朴な確率論の問題意識からも自然に現れることを述べて，ルベーグ積分論を初めて学ぶときの障壁を少しでも低いものにしたいというのが本稿の目標です．さらにそれを通して，高校まででは何となく胡散臭い数学とも捉えられがちな確率の概念が現代数学の中でいわゆる純粋数学の一分野として成立するに至った流れも感じ取ってもらうことも目標にしています．

2. 硬貨投げ

確率といえばいつも現れるのが硬貨を投げるかサイコロを振る問題です．ここでもその話から始めましょう．ここでは確率は素朴に捉えておきます．硬貨を 1 枚投げたときに表と裏はそれぞれ 1/2 の確率で出現するとします．以下では，表を “1” の記号で，裏を “0” の記号で表すことにしましょう．硬貨を 5 回投げる（試行をする）と例えば $\{0,1,0,0,1\}$ や $\{1,0,1,0,0\}$ のような結果（標本）が得られます．これらの標本はいずれも $1/32 = 1/2^5$ の確率で現れます．もちろん $\{1,1,1,1,1\}$ のような標本も同じ確率で現れます．

そこで，これらの試行で表が出る頻度を計算してみましょう．原理的には硬貨を N 回投げたときに表が k 回出る組合せの数は正確に求めることができますが，それを数字で表示したときの桁数はエントロピーと呼ばれる量で概ね求めることができます．つまり，${}_N\mathrm{C}_k$ はその割合 $p = k/N$ の（2 進）エ

ントロピー $H = p\log_2(1/p) + (1-p)\log_2(1/(1-p))$ を用いて，約 $(2^H)^N$ と求まります．N 回コインを投げたときのすべての事象は同じ確率 $1/2^N$ で現れますから，$2^{NH}/2^N = 2^{N(H-1)}$ がだいたい k 回表が現れる確率となります．明らかに H は $p = k/N = 1/2$ で最大値 1 を取りますので，N が大きくなるとほぼ $k/N = 1/2$ で確率 1 となります*1)．言うまでもないことですが，例えば N が奇数の場合には表が現れる頻度がちょうど 1/2 ということはあり得ません．ですから正確に述べると「硬貨を N 回振ったときに，『その試行回数ごとに表が出る頻度を計算すると』その割合が $1/2 - a$ 以上 $1/2 + a$ 以下になる確率は（どんな $a > 0$ に対しても）N が大きくなるとき 1 に収束する」と言えます．ここで確率は試行回数 N ごとに計算し，その確率が $N \to \infty$ で 1 に収束すると主張した点に注意してください．おおざっぱに言い直せば「頻度が 1/2 となる確率が 1 に収束する」と主張しているので，これを**確率収束**と呼ぶことがあり，この事実は 1713 年出版されたベルヌイ*2)の『Ars Conjectandi (Arts of Conjecture)』に記されています．

今のように言葉で説明すると混乱しやすいのですが，ここで実際の試行における頻度については何も言及していないことに注意してください．つまり，このような定理にも関わらず，すべての試行において頻度が 1/2 にならないかも知れないのです．言及したのは確率だけなので，どの試行でも決して 1/2 にならないにも関わらず，そうならないことがほとんど同時に起こらないので確率だけが小さくなっていったのかも知れないのです．

3. 重複対数の法則

前節では表と裏を 1 と 0 で表しました．k 回目の硬貨投げでどちらの面が出るかを X_k で表す（例えば $X_3 = 1$ とは 3 回目の硬貨投げで表が出た）ことにすると，N 回の試行で表が出た回数は $\sum_{k=1}^{N} X_k$ と書くことができます．この節では記号を変えて，表と裏を 1 と −1 で表しましょう．すると $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ は数直線の原点から出発し，確率 1/2 ずつで上と下に 1 歩動く酔歩（ランダムウォーク）の N 歩目の位置を表します（図 1 の左図．3 つの標本が例示してある）．これは本質的には前節で考えた表の出る回数と同じものです．この酔歩の位置について，ヒンチンの重複対数の法則と呼ばれる極めて深い定理が知られています．それは $\bar{S}_N := S_N/\sqrt{2N\log\log N}$ を考えると，N の大きいところではその最大値・最小値（正確には上極限・下極限と呼ばれる量）が 1 と −1 になるというものです（図 1 の右図）．しかしながら，もし読者が分散という量について聞いたことがあるなら，1 歩で動く幅は上下に 1 つずつですから，1 回ずつの移動の分散は 1 であり，従って S_N の分散は N です．このことから $\bar{S}_N$ の分散は $1/\log\log N$ の速度*3)で（極めてゆっくり）0 に収束し，$\bar{S}_N$ は 0 に確率収束することがわかります．

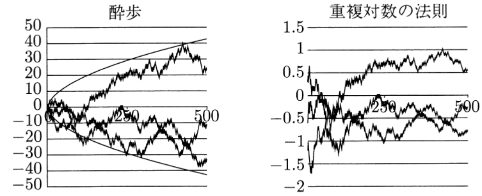


図 1 酔歩（左）と重複対数の法則（右）．

この例は高度な確率論を駆使して得られる定理で，この時点では数学的には正確に述べられませんが，確率収束の事実だけからは標本それぞれについてはほとんど何の知識も得られないことを表しています（$\bar{S}_N$ がほぼ 0 である確率は 1 に収束するが，すべての標本が −1 から 1 の間を振動し続ける）．読者の皆さんは硬貨投げで表が出る割合はいつもだいたい半分だと感じているかも知れませんが，前節の考察はこの主張に対しては何の意味も持っていません．

---

*1) ここで述べたことを示すには，スターリングの公式 $\log N!/(N\log N - N) \to 1$ を用いると簡単です．

*2) Jacob Bernoulli, I (1654–1705).

*3) N が 1 万程度のとき $\log N \simeq 6.9$, $\log\log N \simeq 1.9$ 程度ですが 1 兆くらいのときには $\log N \simeq 27.6$, $\log\log N \simeq 3.3$ 程度です．

4. 大数(たいすう)の強法則

第2節で述べたベルヌイの定理は現在では**大数(たいすう)の弱法則**と呼ばれています．前節で述べたような標本それぞれについての表の出る割合，つまり N 回目までに表が k 回出たとして k/N が $N\to\infty$ で $1/2$ に収束する確率を調べようとすると，第2節のように試行回数 N ごとに確率を計算するのではなく，仮にそれが現実的に観測できなくとも，任意の試行回数を考えるためには記号的に $N=\infty$ 回の試行についての確率を考える必要があります．しかし，その希望は一瞬で打ち砕かれます．そのときには，形式的にはすべての試行の確率は等しく $1/2^\infty=0$ です．そもそも起こり得る場合の数は N 回のときの有限（2^N）通りから，一気に可算無限を飛び越して連続無限（$2^{\mathbb{N}}$）です．ここにいたって高校までで慣れ親しんだ組合せに基づく確率はあっという間に破綻してしまいました．

そこで革命的なアイディアが登場します．例えば3回の試行 $\{0,1,1\}$ があれば，それらの前に“0.”をつけ，後ろに“$*$”をつけて“$0.011*$”と書くことにします．そうして，“$*$”は「0 と 1 とが何でも，いくつでもいいから並んだもの」と解釈します．そうした上でできあがったものを2進小数と考えます．ただし，実数の無限小数表示には一意性がないので，1 が無限に続くものは除外します．つまり $0.011*$ は区間 $[0.011, 0.100)$ を表すとするのです．特にこの区間の長さは $1/2^3$ であり，これが試行 $\{0,1,1\}$ の確率と等しいことに注意してください．こうして（若干の曖昧さを気にしないことにすれば*4)）すべての N 回の試行は長さ $1/2^N$ の区間として表現できることになります．そしてその長さが確率を与えることになります．この設定の下で我々が求めていた性質は次のように表現できます．「$[0,1]$ 区間の実数を2進小数で表現したとき，1 と 0 が同じ割合で現れる実数は極めて多い，特にその集合の『長さ』は 1 である」．これを**大数の強法則**と呼び，ボレルによって1909年に示されたものです．このような実数を正規数と呼びますが，今2進数を用いたことは本質とは関わりありません．

*4) 実数表示で 1 が無限に続くことを除外したので対応が完全ではありませんが，当面問題にはなりません．

5. 長さ概念の反省

前節である集合の『長さ』を測ることで大数の強法則を述べることができましたが，その概念については注意が必要です．直観的には $[0,1]$ に含まれる無理数の全体も有理数の全体もぎっしり詰まっていますから，長さとしては1にしたくなりますが，そうすると長さ1の線分の中に交わらない長さ1の集合が2つ存在することになり都合がよくありません．線分ではない集合の長さを測る試みは19世紀の末から多くの数学者によって試みられますが，おおざっぱに言い切れば，いずれも今述べたような方法で測ろうとしていました．つまり，集合 A を交わらない区間の有限列で覆い，その区間の長さの和の下限を集合 A の『長さ』にしようというのです．ところが，ボレルは実数の開集合 U は交わらない開区間 $I_1, I_2, \ldots$ の合併，つまり U の任意の元 u はある開区間 I_k に含まれているということを知っていました．そこで有界な開集合 U に対してはその開区間の長さの和として『長さ』を定義します（正数列の可算和として必ず収束する）．そして開集合 A, B の差集合 $A-B$ として表される集合（単なる引き算）や，それらの可算合併に対して（正数の可算和）『長さ』を定義します．そのようにして得られる集合は現在ボレル集合と呼ばれています．特に，もし $A_1, A_2, \ldots$ が共通部分を持たないなら，「いずれかの A_k に含まれている点すべての集合*5)」の『長さ』は各 A_k の『長さ』の和の極限であること（**完全加法性**）を示し，こうしてその意味での『長さ』（**測度**と呼ばれます）によって前節の定理を曖昧さなく

*5) これを，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ や $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と書くこともありますが集合の「極限」的なものではありません．数列（や和）では $\lim_{n\to\infty} 1/n=0$ のように極限値がその列に含まれないことは普通ですが，集合の場合にはどれかの A_n に含まれるものをこう書きます．

記述することができるようになったのです．つまり，「硬貨投げで表が出る割合が 1/2 に収束するような試行全体の確率は 1 である．」

そしてこの実数の開集合に対する区間の性質をうまく使う議論からいわゆる位相空間論の研究が花開いていきます．

一方ルベーグは集合 A を覆う開集合の測度の下限を A の**外測度**，A を含む区間 I に対して I の外測度と $I-A$ の外測度の差を A の**内測度**と呼び，それらが一致する集合 A を**可測**といってその値を測度と呼ぶことにしました．一見複雑ですが，本質的にはボレルの意味で測度 0 の集合の部分集合は有無をいわさず測度 0 とした（測度の完備化と言います）のと同じです．

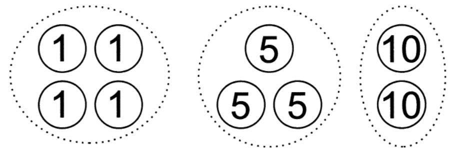
6. サイコロ振り

今度は硬貨投げをやめて，サイコロを振りましょう．そして表が出た回数を数える代わりに出た目の和を取ることにします．そうすると表の頻度 1/2 の代わりに，各試行において出た目の平均 $7/2 = 3.5$ を用いて同じ議論になります．この 7/2 という値は何かといえば，いうまでもなく $(1+2+\cdots+6)/6$ で求められた量です．この量は実際にサイコロ振りの試行を 1 回でもやったかどうかに一切関わらず，目の前にサイコロがあるというだけで決まっている量で，サイコロの目の**期待値**と呼ばれます．再び反省すれば，この値は，「各目の値と，それが出る確率を掛けて和を取る」つまり $\sum a_k P(a_k)$ で求められた量です．ここで a_k は k 種類目の値で，P はその確率です．サイコロの目の期待値を求めるにはこれ以外のやり方は考えようにもどうしようもありませんが，この方法は日常生活でも実に自然なものです．

例えば財布の中に硬貨がたくさん入っているとします．

①⑤①⑩⑤⑤①⑩①

合計でいくら入っているでしょうか．$1+5+1+10+5+5+1+10+1=39$ 円です．一方次のようにして数える人もいます．



もちろん $(1\times4)+(5\times3)+(10\times2)=4+15+20=39$ 円．算数的には後者はやや高度ですが，むしろ間違えにくいと思います．前者のように出てきた順に値を足す方法を**リーマン式**，後者のように値ごとに枚数を数えてから足す方法を**ルベーグ式**と呼びます．

サイコロの目の期待値を求めたときには，サイコロの目の値にそれが出る割合を掛けてから和を取ったので，この期待値はルベーグ式に求めたということになります．

7. ルベーグ式積分

前節で述べたように，リーマン式の足し算とは出てくる順に足し合わせるというものでした．積分の場合には図 2 のようになります．つまり積分区間を適当に有限個に分割し，その分割ごとに小さな短冊と大きな短冊とで面積を近似します．すべての有限分割についてこれらを考え，下から近似した面積の上限と上から近似した面積の下限が一致するときに積分値と呼ぶのでした．関数の様子を調べずに区間を分割し，左から順に足していくという方法です．どのような性質の関数ならそれらが一致する（積分可能）かはかなり難しい問題です（デュボア・レイモンの定理やルベーグの定理が知られています[6)]）．

一方ルベーグ式の足し算とは値ごとにそれがどの程度あるかを調べて，それを掛け合わせてから和を取るというものでした．関数の積分の場合に

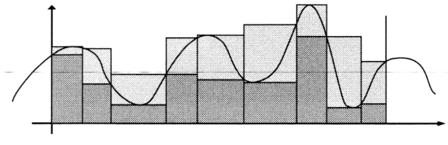


図 2　リーマン式積分．

はあらかじめ関数の値の幅を決めておき，その幅にどれくらいの区間の長さが入っているかを計算して足していきます．もう少し正確に述べましょう．関数の値は負にならないとして，関数の値を幅 $1/2^n$ で分割します．いきなり無限和になっては困るので例えば $f(x) < n$ のところだけを考えて $k/2^n \le f(x) < (k+1)/2^n$ を満たす x の集合を F_k（$0 \le k \le n2^n - 1$）とおきます．そしてこの F_k の長さを測り，値としては小さいほうの $k/2^n$ を採用することにして，これらを掛け合わせながら加えていきます．そして $f(x) \ge n$ のところ（F_{n2^n} とおきましょう）では値として n を採用しておきます．こうして面積の近似値として

$$I_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} m(F_k) \tag{1}$$

を求めます．ただし，$m(A)$ は第5節で述べた意味の集合 A の測度（長さ）とします．図3を見ると一般に F_k たちは複雑に細切れになりますが，例えば連続関数の場合には開区間の逆像は開集合ですから，ボレルの意味で問題なく扱うことができます．つまり，例えば $\{a \le f(x) < b\}$ という集合は $\{f(x) < b\}$ から $\{f(x) < a\}$ という集合を取り除いたもので，測度は（有限の）差については問題なく定義できていますから一般に $\{f(x) < a\}$ という集合の測度を測ることができればこの（有限）和は問題なく考えられます．

そして n が増加すると，関数を区切った区間が細かくなるだけなので I_n は単調に増大します．従って $n \to \infty$ で（正の無限大も込めて）I_n は収束します．その値を積分値として採用するというのがルベーグ式積分です．リーマン積分の場合と違い，コンパクト上で連続関数が積分可能であることは自明でした．負の値も取り得る関数の場合にはこの議論は成立しないので，あらかじめ $f(x)$ の正の部分 f^+ と負の部分 f^- に分けておいて，それぞれの積分値の差を取ります．従って，リーマン広義積分のときのように正負の値が順々に打ち消し合って積分値が求まるような場合にはルベーグ積分は記号的に $\infty - \infty$ となって値が求まらない（積分不能）となることもあります．しかし狭義に（コンパクト集合上で）リーマン積分可能ならば必ずルベーグ積分可能で，値は一致します．

さらにルベーグの最大の功績は，積分と極限の交換（$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$）について，リーマン式のときのアルツェラの定理*6)を明快に拡張したことにあります（$|f_n(x)|$ が可積分な関数以下であればよい）．これは測度が完全加法性を持っていることを認識した大きな利点です．またさらに $f_n(x)$ が単調であったり，それらの2乗の積分が有界であったりするだけでもよく，極限操作が取り扱いやすいものになりました．

繰り返しになりますが，ルベーグ積分とは「関数の値がどれだけの割合で分布しているかを調べて，関数の値とその割合とを掛けながら加えること」とまとめることができます．分布を調べられるとは $\{f(x) < a\}$ の測度が測れるということで，このとき f は**可測**であると言いますが，確率的な用語を用いれば f は（値ごとに確率が計算できるということなので）**確率変数**であると言います．

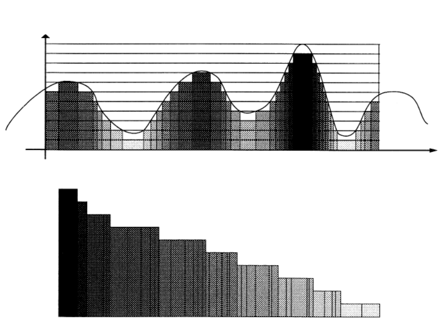


図3 関数の値によって区間を分割（上）とそれを寄せ集たもの（下）．

8. 整理

ルベーグ積分の話を整理しておきましょう．(1) がルベーグ積分の定義でしたが，（連続でも図1のような関数も考えるなら）測度 m に要請されたのは「互いに交わらない集合の可算合併の測度は

*6) 大学1年次では講義時間の関係で「一様収束」という条件しか出てこないことも多いのですが，もっと緩い条件で可能です．

それぞれの測度の可算和である」こと，m は常に非負であること，もちろん $m(\emptyset)=0$ であることなどでした．そして実はこれだけでした．穏やかな関数だけを相手にするなら完全加法性は必要ないように感じるかも知れませんが，ルベーグ積分論の強みや確率論的必然性はすべてこれを必要としますので，常に仮定しておきます．そして，この完全加法性をもつ測度の概念と，値ごとに分布を調べてから和を取るという積分概念が連携して成立しているのがルベーグ積分論です．

一方で測度を測られる側の集合には，「空集合は測ることができる」「それらの集合どうしの差は測ることができる」「それらの集合が可算個あったときに，それらのいずれかに含まれる元の全体は測ることができる」が要請されます．この3つの性質を持つ集合たちの集まりを **σ-集合族**と呼びます．

要約すると，「σ-集合族があり，そのそれぞれの集合に対して値を定める「関数」で完全加法性を満たすものを測度と呼ぶ．そうすると極限操作にも耐え得る理想的積分が定義できる．」となります．実数上に限っても，測度にはある正の関数を積分したもの，集合に含まれる整数の個数，その他いろいろあります．この前者の例で $\exp\{-x^2/2v\}$ としたものは（分散 v の）ガウス測度と呼ばれ，後者の特別例で0が含まれるかどうかのみを考えるものはディラク測度と呼ばれます．特にこれはディラクが形式的に導入した『ディラク関数』に数学的実在を与え，数理物理学の発展に大きく寄与しました．

9. 現代確率論

確率の問題に完全加法性が必要なことは20世紀初頭から十分理解されてきていたようですが，コルモゴロフは1933年の著書[2]の中で逆に前節のような完全加法性を満たし，空間全体の測度が1となるものを確率と呼ぶよう提言します．言い換えれば，確率という概念が何に由来するかは一切問わないと宣言します．全測度が有限（1でなければそれで割っておけばよい）な数学的対象をすべて確率とし，それまで確率論的主張とされてきたものが，いわゆる確率論的直観を一切経ずに，その公理だけですべて証明されることを示しました．そして「すべての公理的な（抽象的な）理論は，その理論が導かれた解釈の他に，数限りない解釈が許され」「厳密な意味では偶然事象や確率の概念と関係のないような科学の様々な分野にも，確率論が応用される[2]」と述べて純粋数学としての確率論の成立を宣言しました．

本稿で述べてきたように，元来的に確率現象の解析の大きな興味の1つに試行回数を増やしたときの挙動がありましたので，確率論は等式・不等式に続く第3の関係式と呼ばれる漸近挙動の解析に対して特に強い数学的方法を提供しています[3]．また，連続関数全体 $W=C[0,T]$（または2乗可積分な関数全体）には（分散がよい性質を満たせば）ガウス測度が定義できることがわかっています．特に $v=(-d^2/dx^2)^{-1}\equiv(-\Delta)^{-1}$ は最も易しい場合で，そのとき元 $w\in W$ に対して $B_t(w):=w(t)$ と定めたものは（t ごとに）最も簡単な W 上の関数であり，ブラウン運動と呼ばれています．これは次稿の『ファイナンスで使う微積分』で中川氏が解説しているものと同じ関数です．そしてより一般に無限次元空間上の関数を伊藤汎関数として構成したりそれを解析するという無限次元解析としての側面も持つほか，統計学・ファイナンス・統計力学・場の量子論といった諸学問に数学的基礎を与える研究の最前線でも大活躍しています．

参考文献

1) 伊藤清，『確率論の基礎』，岩波書店，2004.
2) A. コルモゴロフ，『確率論の基礎概念』，東京図書，1969.
3) 高橋陽一郎，『漸近挙動入門—太鼓の形を聴くために』，日本評論社，2002.
4) 舟木直久，『確率論』，朝倉書店，2004.
5) N. ブルバキ，『ブルバキ数学史〈下〉』，ちくま学芸文庫，筑摩書房，2006.
6) 吉田耕作，『測度と積分』，岩波講座基礎数学，1976.
7) 吉田伸生，『ルベーグ積分入門—使うための理論と演習』，遊星社，2006.

（おとべ・よしき，信州大学理学部）

ファイナンスで使う微積分

中川　秀敏

1. はじめに～「ファイナンス」とはどういう研究分野か～

2007年初夏から深刻化したサブプライム問題に端を発する世界的な金融不安の主たる原因が，いたずらに拡大・複雑化した金融デリバティブの取引を助長させた金融工学にあるというような金融工学に対する批判的な論調をしばしば目にするようになった．もともと，金融デリバティブという金融取引の一手法自体は，金融市場のいろいろなリスク（市場での価格が変動する状況や，お金を貸した相手が契約通りに返済してくれない状況など）を適切に回避する目的で開発されてきた*1)．その意味では，金融デリバティブが単なる悪玉という見方は適切ではない．

しかし，複雑な金融デリバティブが次々と開発され，その結果として金融市場が過度の混乱に陥ったという側面は無視できない．また，市場が過度に混乱した状況下では，理論に基づく価値評価や戦略はほとんど機能しないということも改めて身につまされた．それゆえ，金融工学の知識や技術が不適切に利用されたという事実や不完全であるという指摘は認めざるを得ないが，金融工学自体は発展途上の分野であり，今回の金融危機を教訓として，むしろ研究をいっそう進めていくべきであると考える．

そもそも，伝統的な「ファイナンス」という学問分野は，資金調達・投資・株主への配当などのお金にまつわる企業の意志決定について理論的に考えることを目的としている．モデルの定式化や分析においては数学が有用な道具として利用されているとはいえ，「ファイナンス」は経済学や経営学に含まれる文系的な学問領域であるというのが一般的な見方であろう．それに対して，数理ファイナンスや金融工学と呼ばれる分野は，オプションなどの金融デリバティブの適正な価値を算出したり，ある目的関数を最適化する投資戦略を構築したりするための理論，および理論を実用化する方法を研究することを目的としており，実態は数学や工学分野と伝統的なファイナンスとの複合領域に位置する新しい学問領域であると言えよう．

数理ファイナンスと金融工学を厳密に区別することはあまり意味がないが，数理ファイナンスは，確率解析の言葉で記述されたファイナンスの数理モデルの理論的性質を解明することを目的とする数学の一分野であり，金融工学は理論を実用化するための技術（最適化，オペレーションズ・リサーチ，数値計算など）の開発や高度化を指向する工学の領域であると個人的には整理している．

最近では，実証ファイナンス，統計ファイナンス，計算ファイナンス，経済物理学，行動ファイナンスと名の付く研究領域も登場してきたが，いずれにおいても，理論の構築や応用において数学

*1)　そもそも金融デリバティブに相当するものは，紀元前のギリシャですでに現れていたとも言われている．文献5)を参照されたい．

が果たす役割が大きく，微積分の知識が活かされる場面も少なくない．

以下では,「微積分」をキーワードに, 数理ファイナンスに関連する話題を紹介していくことにする．

2. 大学 1–2 年生の「微積分」の知識でできること

この節では，数理ファイナンス／金融工学の世界では有名な**ブラック・ショールズ（Black–Scholes）の公式**について簡単に説明する．それこそブラック・ショールズの公式については, 様々なテキストで分かりやすい解説がなされていて, 以下の解説もそれらの最大公約数的な内容になっていることをお断りしておく．

大学の理工系学部の標準的なカリキュラムであれば,「偏微分」や「広義積分」は大学 1 年生時に学習すると思うが，そのくらいの微積分の知識と確率論の知識が少々あれば，以下で説明するブラック・ショールズの公式の導出過程は理解できるはずである．

ブラック・ショールズの公式とは，ヨーロピアン・オプションと呼ばれる最も基本的な金融デリバティブ商品の適正価格を導出するために不可欠な計算ツールである．以下では，ある会社の株式に対する**ヨーロピアン・コール・オプション**を例として考える．

ヨーロピアン・コール・オプション（以下では，単にコール・オプションと書くことにする）とは，将来のある決められた時点（満期）において，前もって決められた価格（権利行使価格）で原資産（ここでは株式）を**購入する権利**を金融商品として取引可能にしたもので，金融デリバティブの中では最も基本的なものと言える*2)．

現時点 $t \in [0,\infty)$ における株価を $x(>0)$ とし，コール・オプションの満期時点を $T(>t)$，権利行使価格を $K(>0)$ とする．また，無リスクで資金を貸借する際の利子率（連続複利）を $r \in \mathbb{R}$ とする（時点 0 で 1 だけ預金すると，s 時点後には e^{rs} だけになる）．

満期時点 T における株価を $S(T)$ と表す．$S(T)$ の値は現時点では未知であり確率変数として見なされる．ここでは詳しく説明できないが，ブラック・ショールズのモデルでは，この確率変数 $S(T)$ が，**リスク中立確率**と呼ばれるオプションの価格付けのために用いる特別な確率の下では，次のように表されると仮定する．

$$S(T) = x\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}\cdot\xi\right).$$

ここで，$\tau := T-t$ と置き換えている．また σ は瞬間的な株式収益率の標準偏差に相当するパラメータであり，ファイナンスの世界では**ボラティリティ**と呼ばれる．また，ξ は平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従う確率変数，すなわち確率 $\mathbb{P}(\xi \le a)$ が，標準正規分布関数 $\Phi(x)$ を用いて

$$\mathbb{P}(\xi \le a) = \Phi(a) := \int_{-\infty}^{a} \phi(y)dy$$

と与えられるものとする．ただし，

$$\phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

とする．$S(T)$ の自然対数が正規分布に従うので，$S(T)$ は対数正規分布に従うと言うこともある．

次に，コール・オプションの価値に目を向ける．満期時点 T になったとき，株価が権利行使価格以上（$S(T) \ge K$）の場合には，コール・オプション保有者は権利を行使して対象となる株式を K で購入して即座に $S(T)$ という実際の価格で売却することで，その差額 $S(T)-K(\ge 0)$ をふところに入れることができる．この $S(T)-K$ が満期時点 T におけるコール・オプションの価値と見なされる．

一方で，実際の株価が権利行使価格を下回った（$S(T) < K$）場合には，株を権利行使価格 K よりも安く市場で入手できるので，コール・オプションの権利を行使してわざわざ市場より高く購入するのは合理的とは言えない．したがって，$S(T) < K$

*2) 売却する権利は，プット・オプションと呼ばれる．また，満期時点以前であれば任意の時点で権利行使可能なデリバティブは，アメリカン・タイプと呼ばれる．

の場合は，オプションから経済的便益が得られるわけではないので，満期時点 T におけるコール・オプションの価値は 0 と見なされる．

これら 2 つの状況をまとめると，満期時点 T, 権利行使価格 K のコール・オプションの将来の価値は $\max\{S(T)-K,0\}$ という式で表すことができる．合理的に考えると，もしコール・オプションが無料で手に入れられるならば誰もが欲しくなるはずである．したがって，コール・オプションを保有するためにはいくらかの対価が必要であり，最大の問題は，このコール・オプションの現時点 t における適正価格ということになる．

厳密な議論によってオプション価格を導出するためには，数理ファイナンスの理論を学ぶ必要があるが，以下では必要な結果だけを拝借して説明する．コール・オプションの現時点 t における適正価格は，$\max\{S(T)-K,0\}$ という満期時点のオプション価値を金利 r で現時点の価値に割り引いた（この場合は $e^{-r\tau}$ を掛けた）ものについて，リスク中立確率の下で期待値をとることで得られるというのが，数理ファイナンスにおける基本的な定理の帰結である．したがって，オプションの適正価格を求める問題は，

$$F(y) := \max\left\{xe^{\sigma\sqrt{\tau}\cdot y-\frac{\sigma^2}{2}\tau}-Ke^{-r\tau},0\right\}$$

と定義される関数 $F(y)$ に対して，標準正規密度関数 $\phi(\cdot)$ を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\phi(y)dy$$

という広義積分を計算する問題に帰着する．

被積分関数の max の処理や，置換積分などを行うことで，上の積分式は最終的に次のような形で表現することができる．

$$x\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\Phi(d_2). \qquad (1)$$

ただし，Φ は先に与えた標準正規分布関数であり，

$$d_1=\frac{\log\frac{x}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}$$

である．これが世に言うブラック・ショールズの公式である．

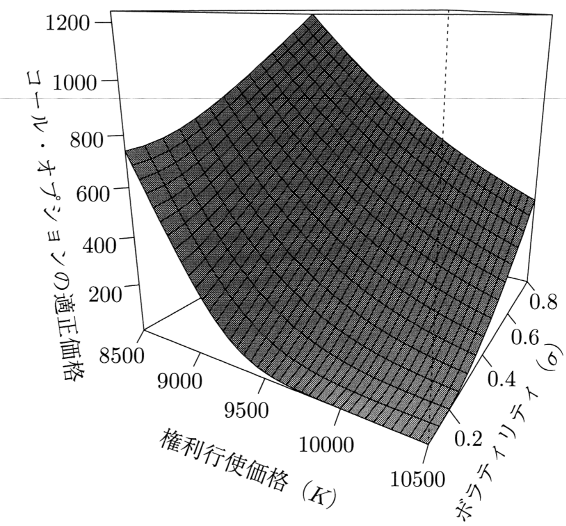


図 1　様々な権利行使価格（K）とボラティリティ（σ）の組に対するコール・オプションの適正価格（$x=9239.24, \tau:=T-t=1/12, r=0.02$ に固定）．

図 1 は，いろいろな権利行使価格（K）とボラティリティ（σ）に対して，ブラック・ショールズ公式から導かれるコール・オプションの適正価格を図示したものである．ただし，$x=9239.24$（2009 年 1 月 7 日の日経平均株価の終値），満期までの期間を 1 カ月（$\tau:=T-t=1/12$），1 カ月金利を 0.2%（$r=0.002$）に固定している．この図から，権利行使価格が高くなるほどオプション価格は低くなり，ボラティリティが大きくなるほどオプション価格は高くなる傾向があることが確かめられるだろう．

ちなみに，大阪証券取引所で取引されている 2 月 13 日満期の日経平均のコール・オプションの 2009 年 1 月 7 日終値は，行使価格 9,000 円のものが 640 円，行使価格 10,000 円のものが 155 円であった．ブラック・ショールズの公式を用いてこの価格を出すためには，ボラティリティ σ がどのくらいの大きさであるべきかを逆算してみると面白いだろう．

さて，ブラック・ショールズの公式を導出する別の方法として，ブラック・ショールズの原論文 1) において導出された

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+rx\frac{\partial v}{\partial x}-rv=0,$$
$$v(T,x)=\max\{x-K,0\} \qquad (2)$$

という形の偏微分方程式を直接取り扱い，時点 t における株価が x のときのコール・オプションの価格 $v(t,x)$ を求める方法が知られている．

この偏微分方程式の中に現れる偏導関数

$$\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad \frac{\partial v}{\partial t}$$

は，それぞれデルタ（Δ），ガンマ（Γ），セータ（Θ）と呼ばれる．これに，ロー（$\varrho:=\frac{\partial v}{\partial r}$）およびベガ（$\mathcal{V}:=\frac{\partial v}{\partial \sigma}$）を加えたものは一般にグリークス (The Greeks) などと呼ばれている*3)．例えば，デルタは原資産の現在価格が上昇したときにオプション適正価格がどのように変化するかを示す量であるが，原資産価格の変動リスクを完全に打ち消すために保有すべき原資産の単位数という意味がある．グリークスはオプション取引のリスク管理にとって非常に重要な指標である．

いま，$v(t,x)$ は (1) 式で具体的に与えられているので，各グリークスの計算は偏微分の練習問題としてちょうどよいかもしれない．ちなみに，コール・オプションの場合のデルタ，ガンマ，セータはそれぞれ次のように表される*4)．

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\Phi(d_1),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\phi(d_1)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial v}{\partial \tau}\phi(d_1)\frac{\sigma x}{2\sqrt{\tau}}-rKe^{-r\tau}\Phi(d_2).$$

また，これらを (2) の偏微分方程式に代入することで，(1) 式が (2) の解になっていることを確認してみてほしい．

今回は，最も基本的なオプションの場合だけを取り上げたが，より複雑なオプションの場合においても，無裁定条件の下での適正価格を計算する場合には，期待値の計算（＝積分の計算）または偏微分方程式の問題に帰着されることが知られる．

複雑なオプションの適正価格計算になると手計算では歯が立たず，最後はコンピュータの助けを借りて数値計算を行う場合が多い．しかしながら，コンピュータの計算負荷を減らすための工夫をする際に，大学 1–2 年生で習う微積分の知識が役立つこともあり，数理ファイナンス／金融工学に関連する仕事や研究で，大学 1–2 年生で履修できる微積分の知識だけで可能なことは少なくない．

3. 確率解析における「微積分」と数理ファイナンス

大学 1–2 年生で修める「微積分」の知識が，オプションの適正価格やデルタなどのリスク指標の計算に役立つことは触れたが，数理ファイナンス研究の醍醐味は，実際の金融市場の状況を適切な確率モデルで定式化し，その確率モデルの性質を（できればエレガントに）解明していくということであると筆者は考える．

そのような意味で，数理ファイナンスの研究を本格的に行うためには，測度論・ルベーグ積分論を基礎に置く「確率論」*5)，およびブラウン運動の性質，確率積分の定義と性質，伊藤の公式*6)，確率微分方程式を扱う「確率解析」を修得する必要が生じる．

確率解析においても「微積分」の概念が登場するが，それは大学 1–2 年生で扱う実数上あるいはユークリッド空間上で展開される微積分の世界の単純な延長線上にはない．確率論や確率解析の専門用語についての細かい説明は割愛するが，以下で，確率積分と伊藤の公式について気分的なものだけでも伝える努力をしてみたい．

数理ファイナンスにおいては，投資家が株式などの金融資産の売買で得られる利得の変動を記述

*3) ベガは，ギリシャ文字ではないが，慣例としてグリークスとして扱われる．

*4) (1) 式の $x\Phi(d_1)$ の部分だけを見るとデルタの計算は自明に見えるが，実際には d_1, d_2 が x の関数になっているので注意．途中の計算はそれほど簡単ではない．

*5) 詳細は前稿の乙部氏による解説を参照されたい．

*6) 周知のことであるが，この伊藤の公式の生みの親である伊藤清京都大学名誉教授は 2008 年 11 月 10 日に 93 歳で逝去された．筆者は大学院生時代に，京都で一度だけ伊藤先生に直接お目にかかる機会があった．謹んで哀悼の意を表したい．

するために**確率積分**が用いられる．おおざっぱに言うと，確率積分は**ブラウン運動**と呼ばれる確率過程（ここでは，時間に依存する確率変数の族と考えておく）の変動に関する積分ということになる．ここで言うブラウン運動とは，ブラウン（Brown）が発見した水中での微粒子の不規則運動のことではなく，ウィナー（Wiener）によって定式化された確率過程のことで，確率解析の理論構築において基本的かつ不可欠なものである．

確率過程 $(W(t))_{t\geq 0}$ が，（確率 1 で）t について連続な見本経路をもち，任意の時間分点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して，増分 $W(t_1) - W(t_0), W(t_2)-W(t_1), \cdots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ は独立であり，なおかつ任意の $k = 1, \cdots, n$ に対して $W(t_k)-W(t_{k-1})$ が平均 0, 分散 $t_k - t_{k-1}$ の正規分布に従うという条件を満たすとき，$(W(t))_{t\geq 0}$ を標準ブラウン運動と言う．

図 2 は，シミュレーションで生成したブラウン運動の 100 本の見本経路（実際には時間幅を 0.01 として離散化している）を横軸を時間に表現したものである．比較のため，空間方向のスケーリングを見るために $\pm\sqrt{t}$ の曲線もプロットしておいた．ブラウン運動の見本経路の多くが，時間の進み方に対して時間の平方根程度の広がりをもっていることがこの図で確かめられるだろう．

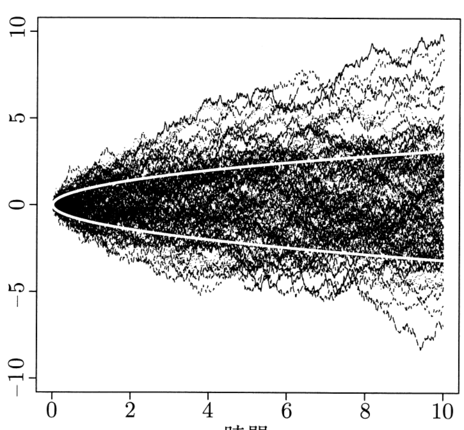


図 2　シミュレーションで生成したブラウン運動の 100 本の見本経路（時間幅を 0.01 として離散化）．

このブラウン運動 $(W(t))$ に関する確率積分（伊藤積分とも呼ばれる）は，適当な条件を満たす確率過程 $(H(t))_{t\geq 0}$ を「被積分関数」のように見なすとき，$\left(\int_0^t H(s)dW(s)\right)_{t\geq 0}$ と表記されることが多い．

面積を細長い長方形の和で近似しようという発想が根底にあるリーマン積分のイメージから類推すると，上のように表記される確率積分も，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ を時間 $[0, t]$ の分割として，例えば，時間の分割幅を 0 に近づけるときの

$$\sum_{i=1}^{n} H(t_{i-1})\{W(t_i) - W(t_{i-1})\} \qquad (3)$$

という形の式の極限として理解できそうに思えてしまう．あるいは，もっと単純に

$$\int_0^t H(s)dW(s) = \int_0^t H(s)\frac{dW(s)}{ds}ds \quad (4)$$

という式変形で捉えることができそうである．

しかし，ブラウン運動の見本経路は（確率 1 で）連続ではあるが，ほとんど至る所で微分不可能である．そのため，(4) 式のような解釈はできないし，(3) はブラウン運動の見本経路を固定して極限をとると発散してしまい，意味のあるものにならない．

実は，関数解析の知識を用いると，(3) 式のように区間 $[t_{i-1}, t_i]$ に対する被積分過程の値として，その区間の左端の点に対応する値 $H(t_{i-1})$ を採用することで，確率積分を L^2 空間におけるノルム収束の意味での (3) の極限として理解することは可能である（区間の左端以外の点に対応させると極限の値が異なってしまう）．

また，確率積分は「積分」と名が付いているが，その正体は（局所）マルチンゲールというクラスに含まれる確率過程であることを注意しておく．マルチンゲールは，数理ファイナンスの理論を構築する上で，極めて重要な概念である．

次に，**伊藤の公式**であるが，これは通常の微積分における合成関数の微分法則（鎖法則）と見ることができる．数理ファイナンスにおいては，前

節でも見たように金融デリバティブの価格付けが主要な問題の一つである．金融デリバティブ価格を突き詰めると，ブラウン運動を適当な関数 f に代入した $f(W(t))$ という形で表現できることが多い．このとき，$f(W(t))$ の微小時間における変動（形式的に $df(W(t))$ という「微分」の形で表す）を知ることが解析する上で有効になる．

関数 f を2回連続微分可能なものと仮定しておく．通常の合成関数の微分の場合，$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$ というように，f の1階の導関数しか現れない．一方，$f(W(t))$ に対する微分を形式的に表すと，

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt$$

になり，f について2階の導関数の項まで現れるという特徴がある．これが，最も単純な場合の伊藤の公式である．この結果は，ブラウン運動の2次の変分について $(dW(t))^2 = dt$ という形式的な関係があることに由来する．また，式の形からも類推できるが，テーラー（Taylor）展開を用いて伊藤の公式を証明することができる．

最近ではフランス人研究者のマリアヴァン（Malliavin）によって創始されたマリアヴァン解析と呼ばれる，いわば無限次元空間における微積分理論も数理ファイナンスの分野で応用されている．その意味では，拡張された「微積分」の概念が，数理ファイナンスの発展において重要な役割を果たしていると言える．

4. おわりに～ファイナンス研究の展望～

本稿では,「微積分」をキーワードに数理ファイナンスに関係のある話題をごく簡単に解説した．数学の準備がある程度できていて，数理ファイナンスをもっと本格的に学習したい人には，文献2～4)，6) などが格好の教科書になるだろう．

数理ファイナンスおよび金融工学は，今後も妥当か不当かに関わらず様々な批判を受けることになるだろうが，その研究成果を適切に活用することによって金融市場を安定化・効率化する可能性があることには疑う余地はなく，研究の必要性は今後ますます高まると信じている．

数理ファイナンスや金融工学の分野の研究をいっそう発展させるためには「リスクとは何か」を改めて問い直す姿勢が不可欠になっていくと考える．と同時に，そうした本源的な問いを議論して解決する方法を見いだすためにも,「微積分」をベースとする数学のさらなる発展が求められていくことは間違いない．

ちなみに，今回編集部から与えられたテーマが「ファイナンスで使う“線形代数”」であったなら，数理ファイナンスの基本定理とも呼ばれる「市場の無裁定とリスク中立確率測度の存在」の同値性を主要なテーマに解説を試みていたことであろう…．その意味で,「線形代数」もまた，数理ファイナンス理論の構築のために欠かせない．

参考文献

1) F. Black and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”. *The Journal of Political Economy*, **81(3)**, 637–654 (1973).
2) D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, 2nd. ed.* Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series (2007)（同書の日本語訳として，森平爽一郎監修，青木信隆・岩村伸一・大多和亨・中川秀敏訳,『ファイナンスへの確率解析』朝倉書店 (2000)）.
3) S.E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer (2003)（同書の日本語訳として，長山いづみ他訳,『ファイナンスのための確率解析 I：二項モデルによる資産価格評価』シュプリンガー・ジャパン (2006)）.
4) S.E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Contimuous-Time Models*, Springer (2004)（同書の日本語訳として，長山いづみ他訳,『ファイナンスのための確率解析 II：連続時間モデル』シュプリンガー・ジャパン (2008)）.
5) 相田洋・茂田喜郎,『NHK スペシャル　マネー革命 2 金融工学の旗手たち』, NHK 出版 (1999)（在りし日の伊藤清先生のインタビューも採録されている）.
6) 関根順,『数理ファイナンス』培風館 (2007).

（なかがわ・ひでとし，一橋大学大学院国際企業戦略研究科）

径路積分とは何か

前野　昌弘

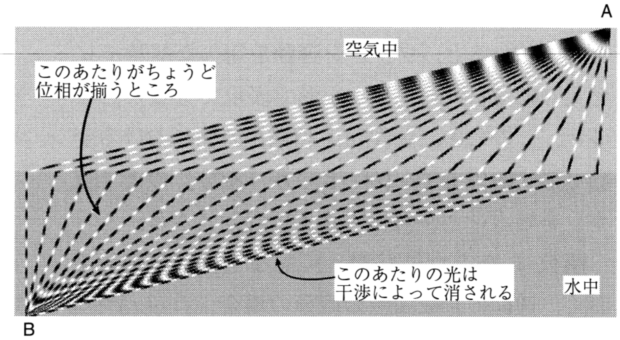


図 1　干渉で説明する屈折の法則.

1. 光は波か？ 粒子か？

径路積分は量子化，すなわち古典力学から量子力学への移行の一つの手段である．そこで，古典力学と量子力学のつながりについて話しながら，径路積分とは何かを解説していこう．

話は 17 世紀に遡る．「光は波なのか，粒子なのか？」という論争があった．ニュートンは「光は粒子である」派であり，「波というのは広がるものだ．それに反して光は直進し，影を作るではないか」と考えていた．しかし光の直進性は波動としての観点からも説明できる．図 2 は光が壁の隙間を通り抜けた後の様子を示している．

ホイヘンス*1)の原理によると波は「素元波」の重なり合いとして表現される．図 2 の左側は素元波が光の届く明るい場所に到着する様子，右側は素元波が影の部分に到着する様子を描いている．

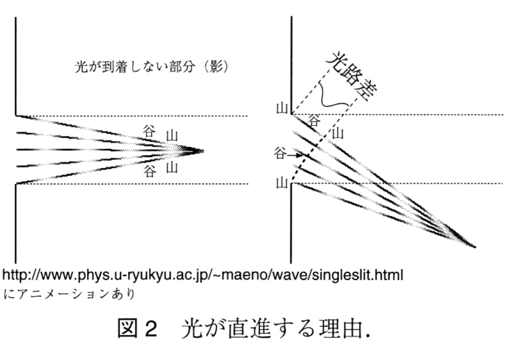


図 2　光が直進する理由.

影の場所には，素元波の山と谷がいっせいに到着するため，干渉によって消されてしまう．これが光が「広がらない」理由なのである．明るい部分には山もしくは谷が一団となって到着するため，ちゃんと光が到着する．

光は波長が短い（10^{-7} m のオーダー）がゆえに，図 2 の「光路差」の部分に，ずっとたくさんの「山谷山谷山谷…」の重なりがあり，干渉による消し合いはほぼ完璧*2)である．当り前のように感じてしまう「光は直進する」という事実には，ちゃんと（波動的性質からくる）理由があるのである．

ホイヘンスの原理以外に，光の進む道を決める原理としては，「フェルマーの原理（光は最短距離を通りたがる）」がある．この原理を初めて聞いた人は皆，「光はいかにして最短距離を知ることができるのか？？」と不思議に思う．光が最短距離を“選択”する理由は，それだけが「干渉によって消されない」からなのである．「最短」ということは，その付近で距離，ひいては位相*3)の変化がゆるやかになっている．ほとんどの光が消し合う中，最短距離を通ってきた光だけが強め合う．図 1 は屈

*1)　ホイヘンスは「光は波である」派.

*2)　「ほぼ」であって完璧ではなく，状況を整えてやればちゃんと光が広がることを実験で確認できる．

*3)　「位相」というのはいかめしい単語であるが，$\sin\theta$ や $e^{i\theta}$ の θ のことであり，波の式が $y = A\sin(kx - \omega t)$ ならば $kx - \omega t$ のこと．このようにして距離や時間と関係する．

折の法則をこの考え方で表現したものである．空気中のA地点から水中のB地点へ到着する光は，ありとあらゆる径路を通っている．しかし，我々が観測する光は，消し合うことがなかった特別な道を通ってきたものだけである．

光の径路を知るためには，最短距離を探す必要はない．いろんな径路を通る光をとりあえず全部考えてみればよい．そのすべてを重ね合わせたのち，干渉によって消されない径路を通った光こそ，我々が観測する光なのである．この「**いろんな可能性を全部足した後，消されずに残るものが実現する**」という考え方を物質粒子にも適用するのが，径路積分の考え方である．

2. 物質は波か？ 粒子か？

光から物質へと目を移そう．古典力学においては「物体は作用が最小となる径路を通りたがる」と表現される「最小作用の原理」が存在する*4)．量子力学の黎明期である1923年，ド・ブロイはここに目をつけて，フェルマーの原理が光の波動性で説明されるように，最小作用の原理にも波動的説明があるのではと考えた．波動光学と同様に「粒子がいろんな径路を通ると考えてすべての可能性を足し上げると，古典力学において実現する径路が残る」と考えたのである．そのとき「作用」は波としての「位相」と結びつく．この考え方の具体的表現の一つが径路積分である（図3）．

通常の「積分」では，一つまたはせいぜい数えられる程度の数の変数（例えば x）を変化させてそのときの関数の値 $f(x)$ を足し上げていく．径

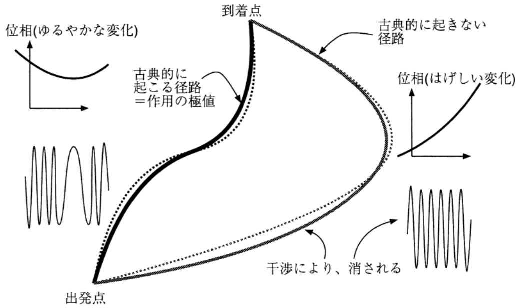


図3　位相と最小作用の原理．

路積分では変化させるのは数ではなく「関数の形そのもの」である．つまり，「出発点 x_i と到着点 x_f を固定して，その間をつなぐ径路のすべてについて，$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x_i,x_f)\right)$ を足し上げる」という計算を行う．S は作用であり，これを $\hbar$ という定数で割ったものが物質波の位相となる．位相（ひいては作用）が最小となる径路が，古典力学的に実現する（干渉で消されることがない）径路である（図4）．

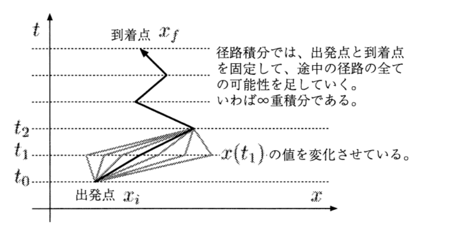


図4　径路積分の原理．

我々が普段物質の波動性に気づかないのは，物質波の干渉による消し合いがほぼ完璧だからである*5)．「ほぼ」だが完璧ではなく，特にミクロな現象では，古典力学とは差が出てくる．そして，径路積分（量子力学）のほうが正しく現象を予言するのである．

このように考えていくと，ド・ブロイが物質の波動論を唱えた後，建設されるべき量子力学の形式は径路積分であるべきではなかったのか，という思いすらする*6)．実際にどのように径路積分という計算が実現するのかは，ファインマンの教科書*7) をひもとくのがいいだろう．

（まえの・まさひろ，琉球大学理学部）

*4)　これまた初学者に「粒子はなぜ作用が最小になる道を知っているのか？」と疑問を起こさせる神秘的な“原理”である．

*5)　ニュートンが光が波だと気づかなかったのと同様，波長が短すぎるのが原因．

*6)　実際にはド・ブロイのアイデアを最初に数学的に実現させたのはシュレーディンガーであり，その結果が彼の名のついた方程式である．径路積分の登場は少し遅れる．

*7)　ファインマン & ヒッブス著，北原和夫訳『量子力学と経路積分』（みすず書房）．

工学と積分

ヘビサイドの超関数を知る



吉野　邦生

1. 高校数学の常識は大学数学の非常識

高校の微積分の授業で微分可能関数は，連続関数であることを習う．そして連続関数は必ずしも微分可能ではないということもついでに習う．ここで解説するのは，連続関数はすべて微分可能になり，それどころか不連続関数も微分できるようになるというとんでもない話（**超関数**の話）である．大学に入学し，新しい数学を習うと，高校数学では常識であったものが常識でなくなる．積分区間の長さが無限になったり，被積分関数が特異点を持ったりする広義積分（異常積分）もそのような非常識の一つである．また，指数関数の変数が虚数や複素数になったり，挙句の果てに対数関数の真数が複素数になる．大学での数学は，無限次元の空間が出てきたり，次元が $\frac{\log 2}{\log 3}$ である図形が出てきたり，非常に刺激的である．

2. ヘビサイドの超関数とは

ヘビサイドの超関数，略して**ヘビサイド関数**とは

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

という大変単純な関数である．$Y(x)$ と表すときもある．図を描けば分かるが（描かなくても分かるが），$x=0$ で不連続な関数である．従って普通の意味では $x=0$ で微分できないが，超関数としては無限回微分可能であり，$\frac{dH(x)}{dx} = \delta(x)$ が成り立つ．ここで

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

は**ディラックのデルタ関数（超関数）**である．こんな単純な関数が一体何の役に立つのかと思う．これが役に立つのである．例えば $H(1-x)H(1+x)$ は，閉区間 $[-1,1]$ の**特性関数**でありそのフーリエ変換は，$\frac{2\sin\xi}{\xi}$ である．$\frac{\sin x}{x}$ は**シャノン–染谷の標本化定理**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(n)\sin\pi(z-n)}{\pi(z-n)}$$

をはじめディジタル信号処理では最も重要な関数である．$\frac{\sin x}{x}$ を $\operatorname{sinc} x$ と表すことも多い．また，デルタ関数は，AM 放送の基礎を支えている．

3. オイラーの公式とヘビサイド超関数のフーリエ変換

大学の微分積分の講義で関数 $f(x)$ の**テイラー（Taylor）展開** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ を習う．

指数関数のテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$$

の変数 x の所に ix を代入して三角関数のテイラー展開

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

と比較すると世紀の大発見**オイラーの公式**

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

を得る．

三角関数，およびその逆関数は，例えば，

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\arcsin x = -i \log(ix + \sqrt{1 - x^2})$$

という風に虚数変数の指数関数，複素数を真数に持つ対数関数で記述できる．これらを統制するのに大学2, 3年生で習う**複素正則関数論**が活躍する．そして，虚数変数の指数関数 $e^{ix\xi}$ を用いて関数 $f(x)$ の**フーリエ変換** $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$ が定義される．ヘビサイド関数 $H(x)$ のフーリエ変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{-ix\xi}d\xi = \int_{0}^{\infty} e^{-ix\xi}d\xi$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon|x|}e^{-ix\xi}d\xi = \frac{i}{\xi - i0}$$

と計算できる．

$$\frac{1}{x - i0} = P.V.\frac{1}{x} + \pi i \delta(x)$$

は，**リップマン・シュインガー（Lippmann–Schwinger）の公式**と呼ばれ，散乱理論や信号処理などで活躍する．$P.V.\frac{1}{x}$ は**コーシーの主値**と呼ばれる超関数である．

4. ヘビサイド超関数と佐藤超関数

超関数には2種類あるということを知ったのは，大学4年生のときである．位相解析学の4月の1回目の授業のときに，担当のU先生（2009年の3月に上智大学を退官された）が，各自，授業の希望を言えと言うので“超関数を勉強したい”と希望を言った所，“この授業では超関数はやらない”と言いつつも，“実は，超関数には佐藤超関数とシュワルツ超関数の2種類あってね”と始まり，超関数について熱く語ってくれた．**佐藤超関数（Hyperfunction）**と**シュワルツ超関数（Distribution）**という単語を知ったので，私にとって，この1回目の授業は大収穫であった．4年間の大学在学中ノートを取ったのはこの先生のこの授業だけである．超関数には他にも**ゲルファント・シロフ（Gelfand–Shilov）の一般化関数**というのもある．これらは，互いに関連し合っている．佐藤超関数は**正則関数の境界値**である．正則関数の境界値は，レッジェ極理論，場の量子論など，素粒子論では良く出てくる．ヘビサイド関数 $H(x)$ は対数関数 $\log z$ の枝を $0 \leq \arg(z) < 2\pi$ として，

$$\frac{-1}{2\pi i}(\log(x + i0) - \log(x - i0)) = H(x)$$

となる．両辺を微分するとデルタ関数の正則関数による境界値表示

$$\frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0}\right) = \delta(x)$$

が得られる．難解な佐藤超関数の理論の簡易化を目標として1980年代に名城大学の松澤忠人教授により始められた**熱核の方法**は大変便利である．熱伝導方程式の初期値として超関数を捕らえる方法である．ヘビサイド関数 $H(x)$ は熱伝導方程式の解 $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}ds$ の $t \to 0$ での初期値である．熱核の方法は超関数のフーリエ変換の像を決定する**ペーリー・ウイナー（Paley–Wiener）の定理**の証明，確率論で重要な正の定符号関数と確率密度関数の関係を記述する**ボッホナー（Bochner）の定理**の証明などに大きな威力を発揮する．

5. ヘビサイド超関数と信号処理

与えられた関数（信号）$f(x)$ と $\frac{1}{x+i0}$ の畳み込み積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y+i0}dy$ を考える．この畳み込み積分のフーリエ変換は，$-2\pi i \hat{f}(\xi)H(\xi)$ となり，ξ が負の部分でゼロになる．従って，逆フーリエ変換は上半平面での複素解析関数になる．このため信号処理の分野では**解析信号**と呼ばれる．

参考文献

1) 吉野邦生・荒井隆行：『ディジタル信号と超関数』，海文堂 (1995).

（よしの・くにお，東京都市大学知識工学部）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

薩 摩　順 吉

微積分の役割

微積分を高校2年から始まって大学の初年度まで学ぶのは，当然ながらその後の学習に必要なものだからである．理工系の標準的なカリキュラムにおいては，その後常微分方程式，偏微分方程式を学んで，現象を解析するための基礎を身につける．

ニュートン，ライプニッツ以来，微積分は物理を扱うのに不可欠な道具であった．というよりむしろ初期の頃は，力学を中心とした物理と微積分を中心とした数学が一体となって発展していった．その後も，物理と数学は二重らせんのように互いに相互作用を及ぼしながら発展していく．

筆者はこれまで30年以上微積分の講義をしてきたが，大学初年度の場合，導入部分でまず複素数を復習した後，オイラーの公式を紹介する．微分方程式の解を求めるのが微積分を学ぶもっとも大切な目的と考え，その準備をするのである．その後，微分法を説明する中で，マルサスの法則を表す簡単な微分方程式について触れ，解である指数関数の重要性を指摘する．さらに，高階微分を学ぶ段になって，ニュートンの運動法則に対応する微分方程式を黒板に書く．現象の解析に微積分が欠かせないことを強調するのである．

ニュートンの運動法則の例としてはバネの単振動を題材とする．バネを取り上げるのにはわけがある．例えば，バネ質点系は物理や化学においては結晶のモデルとして重要である．機械の場合，機械振動そのものである．電気の場合，等価なLC回路網を考えればよい．さらに建築系の場合，構造計算の基礎はバネ質点系である．したがって，多くの理工系の学生にとって微積分は基本として重要であると主張することができる．

近年，高校で物理を履修していない学生が増えてきている．履修していたとしても，入試に必要がないとなると軽くしかやっていない．上記のような例を講義の中で説明しても，もう一つしっくりこない学生が多いようである．因みに，最近の小学生はバネと力の関係を学習しないと聞いたことがある．比例関係を実際に体験する良い機会であるのに，身近でなくなったからというのが理由らしい．私が小さい頃，魚屋さんが自転車に乗って魚を売り，目方を量るのにバネばかりを使っていた．現在ではそんな姿を目にすることはないが，見えないところで様々な種類のバネが使われており，バネの持つ重要性は全く変わっていない．しばらくすると，バネの説明についていけない大学生がますます増えるのではないかと憂いている昨今である．

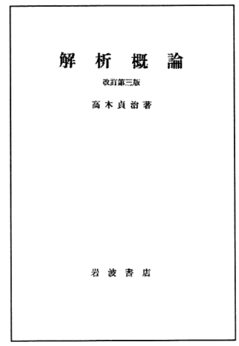
さて，数学を学ぶのに何が必要か．効率的な方法は存在しない．地道に本を読み，計算を何度も失敗して理解を深めていくしか方法はないと私は考える．数学の勉強は煉瓦積みのようなものである．工夫は必要だがどこかを端折ることはできない．一カ所穴があくと煉瓦で作った建物はもろいものである．

ところで，最近書物を軽んじる学生が多い．この2月，試験の直前に質問にきた学生がいた．時間をかけて解説した後，本を見て練習をしておくようにと言うと，そんなものは持っていないと答える．なぜかと聞くと高くて買えないと言う．そのくせ携帯の出費は問題にならないらしい．数学演習のときも，いろんな本を持っているので見せてもらうと，図書館から借りてきた本が多かった．学生のときに使い込んだ本が，将来社会人になったときにきっと役立つと言っても馬耳東風，困ったものである．

微積分を学ぶのにどんな本が良いか．書店の書棚にはたくさんの本が並んでいる．定期試験対策だけを目的とするならば「軽い本」でも構わないだろう．しかし，冒頭で述べたように，大学卒業後，ほとんどの分野で必要になる現象解析のための準備であるとするならば，どうしても「重い本」が必要であると考える．次ページで紹介する本はそうした目的にかなう代表的なものである．数学に王道はないといわれる．地道に基礎を固めて，すばらしい建物を構築したいものである．

（さつま・じゅんきち，青山学院大学理工学部）

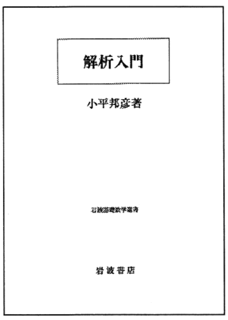
解析概論



高木貞治著，岩波書店（改訂第 3 版，1983 年）

初版は 1938 年に世に出た．70 年経つにも関わらず，内容は決して古くない．その後，日本で出版された微積分の本の原型をなすものといってもよい書で，筆者の語り口に感動した読者が多いと聞いたことがある．本の中で詳しく説明されている，連続であるが至る所微分不可能な「病理的」関数が，その後フラクタルの登場で再認識されたのが，印象深い．

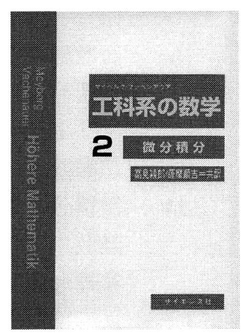
解析入門



小平邦彦著，岩波書店，1991 年（軽装版全 2 冊，2003 年）

フィールズ賞受賞の著者が，まえがきで述べている以下の文が本書の内容を明快に説明している．「現代の数学は形式主義の影響を強く受けていて，数学は公理的に構成された論証の体系であるという点が強調されるが，私の見る所では，数学が，物理学が物理的現象を記述しているのと同様な意味で，実在する数学的現象を記述しているのであって，数学を理解するにはその数学的現象の感覚的なイメージを明確に把握する事が大切である．」

工科系の数学（全 8 巻）



K. マイベルク，P. ファヘンアウア著，高見穎郎，薩摩順吉，及川正行訳，サイエンス社

2 巻が 1 変数の微積分，4 巻が多変数の微積分を扱っており，筆者も翻訳に携わった．本書はミュンヘン工科大学の電気と機械の学生に対する講義をもとにしたもので，応用を強く意識しており，工学や物理の例題も豊富である．それにも関わらず，数学的にもしっかりした内容となっており，さらに先の巻を読み進んでいけば，将来社会人になったときにきっと役立つ本であるに違いない．

特集／微積分を楽しむ

微積分四方山話

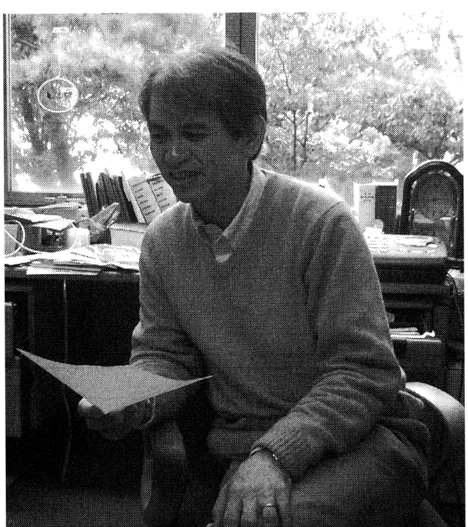
河東　泰之（聞き手：編集部）

1. 新入生がわからなくなる箇所

——微積分を学習する上で躓く箇所には，どういったものがあるでしょうか．

やはり，抽象的なところが躓くポイントになると思います．どのくらい抽象的にやるかは教える人や大学によって違うと思いますが，本当に厳密なものを最初からどんどん話していくと，たいていの人が授業についていけなくなりますね．

それから，有効数字や誤差といった考え方を高校でも大学でも数学の授業では，あまり前面に出しません．このような近似の考え方は数学でも重要なのですが，無限級数でも完全に正確な形で書くのが普通です．これは厳密にはもちろん正しいのですが，一方で何をどうしているのか，近似しているというイメージが湧きにくいようです．



河東泰之氏．

具体的に言えば細かく切って足しているのが積分なんだという考え方を数学の授業では定義した後はあまり前面に出しませんね．一方で物理の授業では，そういったことがどんどん出てくるので，数学との対応がつきにくいようです．

収束や無限の考え方はあまり厳密にしない授業も最近は多いですね．実際，厳密にやらなくてもいいような所もあるのですが，そういった箇所と厳密にやらなければならない箇所との区別は初めて学ぶ人にはつかないようです．ですから，あるところでは凄く厳密にやっているな，と思ったり，別なところではあまり厳密にやってないな，と思ってどう違うのかわかりにくい場合があるようです．

——図を描いたりして自分でイメージすることとなかなか結びつかないということと何か関係があるのでしょうか．

そうですね．特に多変数の微積分の話になると偏微分や重積分の図形的なイメージというのは難しいようですね．一変数のものであればグラフはすぐに書けますが，多変数の場合，例えば曲面のグラフをすぐに思い浮かべるのは大変ですよね．

2. 微積分を学ぶ意義と面白さ

——微積分を学んでいくことの意義や魅力にはど

ういったものがあるでしょうか.

連続的に変化するものを数学的に扱うのが，微積分なのですが，世の中の物事の変化はたいてい連続的に変化しているので，どんなことでも数量的に扱おうとすれば微積分はあらゆるところに出てきますから応用範囲は非常に多いです．そういう意味では微積分を学ぶ意義はますます深まっていると思います.

——そうしますと，単独で使われている，というよりもどういった分野に応用されているかを見たほうが面白いのでしょうか.

そうですね．もちろん，純粋に数学的に理論的な立場からも重要なのですが，応用の意味で使っている，という人のほうが多いですからね．経済での応用例で言えば，お金の変動を量的に扱おうとすると，すぐに微積分が出てきます．例えば，コンビニの売り上げを計算しようとするときにも，また，インフレ率の変化の様子は，2 階微分して云々となります.

あと，理論的な立場から言うと，テイラー展開や無限級数，微分と積分の関係式も不思議ですよね．例えば，オイラーの公式にしても三角関数や指数関数がテイラー展開できるというのは理論的な立場から言えば驚異的なことですよね．π や e が意外なところにいくらでも出てくるというのはその顕著な現れです.

3. 微積分と線形代数の違い

——微積分と線形代数の本質的な違いは何なのでしょうか.

微積分というのは連続的な変化を扱っていて，もちろん線形代数でもそういったことは使えます．ただ，あまり前面には出てこなくて，わりと離散的なことを扱いますね.

微積分では連続的な変化を扱うために ε–δ 論法がありますが，線形代数では厳密にやるための仕組みが違いますね．それもどの程度，厳密に扱うかによって違ってくると思います．本当に具体的にやってしまうと，数が並んでいる行列を対角化したり，ということだけなんですが，線形空間や基底などの概念が導入されると難しくなりますね.

こういった意味の抽象性は微積分における抽象性とはちょっと違いますから，どちらかというと，コンピュータの処理は線形代数の抽象性のほうが相性がよいように思います.

4. ε–δ 論法

——微積分というと ε–δ 論法が出てきますが，その先には何かに通じるものがあるのでしょうか.

そうですね．ε–δ 論法は現代解析学の基本的な事項になっています．先ほどもお話しましたが，あまり厳密に扱わなくてもいい所と厳密に扱わなければならない所というのは，なかなか区別がつかないですから，そういうものをきちんと扱おうとする場合，ε–δ 論法やその発展型が出てきます.

この辺りが区別できるようになると，応用上，間違いがないように扱えるようになります．ただ，現実には学部生のうちにこういった区別ができるようになるかと言うと難しいと思います．実際に将来使おうとすると，計算はコンピュータがやりますので，厳密にやろうとしなくても何とかなる所とそうでない所が出てきて，こういうところで区別できないと厳しいですね.

解析学の別の基礎付けとして，個人的には超準解析が好きだったのですが，論理的な操作が難しいので，あれをしっかりとやるのは難しいです．本当は難しい知識がいるわけではないので，1,2 年生でもできないことはないんですけどね．論理的なことが好きならば取り組みやすいと思います.

5. 微積分の勉強法

——微積分を勉強する上で重要なことは何でしょうか.

微積分を勉強する上で重要なことは，証明をするときに何が明らかなことで，何が明らかでないことかを理解することだと思います．学生の答案を見ても重要なことをとばして書いてあって，正しいけれども重要でないことが延々と書いてある場合があります．相当な時間をかけないと，こういうことには慣れないと思います．

高校までの間に理科系の人は相当の時間を数学にかけていると思いますが，大学に入学すると，たくさんあるうちの一つの科目になってしまいますので，あまり時間をかけていないことが多いと思います．しかし，高校の1年間で習う数学より大学の1年間で習うもののほうが分量の多さや内容の深さを考えると，ずっと大変ですので，かなりの時間をかけないと身に付きません．

実際，週1回90分の授業で，ぱっぱと証明するのだけを聞いて，それだけでわかるほうが凄いですよね．ですから，自分で勉強することが重要です．ただ，自分で勉強する際にはいい演習書が少ないので，学生も不満に思っているのが実情です．計算主体のものはありますが，論理的なことをしっかり理解しようとすると，いい演習書は外国も含めて，少ないですね．

というのも，証明問題というのは非常にうまく工夫しないと，すごく難しいものか見ただけで明らかなような問題になってしまうので，作るのが難しいのが，よい演習書が少ない理由だと思います．

また，具体的に勉強するに当たっては，極大極小の問題や多変数関数のテイラー展開，積分の変数変換などの話題を学部初年度のうちに理解できるようにするのを目標にするといいと思います．

6. 特集ラインアップからみて

——今回の特集では基礎的な事項から応用まで，かなり盛りだくさんな内容になっているかと思いますが，数学専攻の人とそうでない人とでどういうところに意識を持っていればよいでしょうか．

そうですね．数学専攻でない人はどういう方向に応用できるかを意識するのが重要だと思います．数学科の先生方の授業を受けると実際の世界とはかけはなれた抽象論のように聞こえますが，そうではないから教えているわけですからこういった意識を持つのは重要だと思います．

数学専門の人は理論的な構造だとか仕組みが後々まで大事になっていくので，微積分を学ぶというのはそうした理論体系を学ぶ最初の経験ですよね．つまり，数学的な枠組みを理解するための第一歩になるわけです．

物理との関係ですと，大学の物理ではどんどん先のことを使ってしまうので，そのギャップに慣れるのも大変ですね．高校ではいかに微積分を使わずに進めるかということになっていたのですが，大学では全く逆で，例えば電磁気学では，多くの人が物理の授業で先にベクトル解析を学んで，後で数学の授業で学びますね．

7. メッセージ

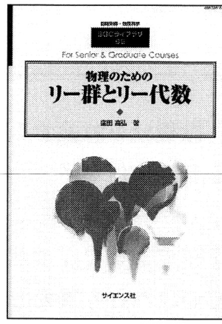
——最後に学生さんへのメッセージをお願いします．

そうですね．先ほどもお話しましたが，微積分に限らず，数学一般は時間をかけて身につけるものですので，それだけ時間をかければ，いつかは返ってくることを知っておいてほしいですね．それだけ根気がいるものだということですね．

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2008年10月，
東京大学駒場キャンパス研究室にて）

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）



物理のための リー群とリー代数

窪田高弘著，B5 判，200 頁，本体 1886 円，サイエンス社

本書は物理学専攻学生にとって必須の道具となっている群論のうちで，リー群・リー代数に関して初学者向けに書かれたものである．素粒子論を専門とする著者と同じく評者も素粒子論・数理物理学を専門とするが，研究に必要とされる数学的素養は大変増えてきた．群論関係だけを取り上げても，角運動量との関係で現れる $SO(3)\cdot SU(2)$ と特殊相対論で現れるローレンツ群の初歩を知っていれば事足りた時代の後は，クォーク模型で $SU(3)$ が登場し，大統一理論で高いランクの有限次元リー代数が全て現れ，更に超弦理論・共形場理論で無限次元代数が，可解格子模型で量子群が，という具合に様々なものが登場してくるようになった．

まえがきによると，本書は学部生対象に行った講義の有限群部分を圧縮し連続群部分を膨張させたものとのことである．評者も修士初年向けの講義（研究室の 4 年生も何人かはもぐりで聞いてくれている）で群論関係の話を教えているが，何を何処まで話すのかという点で毎年悩んでいて未だに定まった形になっていない．物性関係の学生もいるので講義では有限群は外せないが，対称群の表現を紹介したついでに指標のフェルミオンを用いた表示，ボソン・フェルミオン対応，対称多項式へと脇道へ外れていく年もあれば，黒板一杯に三角格子を描いて $\mathfrak{su}(3)$ の指標公式を延々と説明した年もあって，シラバス通りに行かずに学生に迷惑を掛けてしまっている．本書では，物性論や化学への有限群の応用については他書に譲ることにして有限群をバッサリ省き，話を連続群に集中している．有限群をある程度やってからでないと連続群に進んではいけないように何となく思い込んでいたが，そんなことはないのである．本棚にあるジョージアイのリー代数の本（素粒子論業界では著名な本）を見直してみると，この本もリー代数から始まっていた (但し，第 2 版では第 1 章に 40 頁余りの有限群の説明が加えられているが…)．

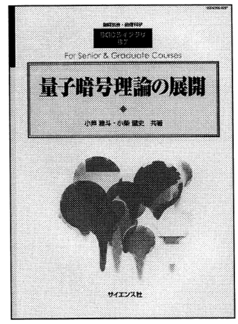
第 1 章で群および表現を概観した後，第 2 章で連続変換群を通してリー群を定義し，リーの 3 つの基本定理を示すことによりリー代数が導入され，リーの定理の逆もまた示される．物理屋にとって十分な証明が丁寧な計算と共に示されているのが嬉しい．授業で線形リー群を出発点にしてしまっている評者には懐かしさと共に新鮮に感じられた．第 3 章では線形リー群とそのリー代数が扱われ，第 4 章で単純リー代数の分類が与えられ，第 7 章で既約表現の分類が紹介される．第 8 章では不変積分が紹介され，シューアの補題や指標の直交性が与えられている．$SO(3)$ と $SU(2)$，$\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{su}(2)$ が具体例として随所に取り挙げられているが，第 5,6 章でより詳しく説明されている．第 9,10,11 章では，クォーク模型で現れる $SU(3)$，大統一理論で用いられるゲージ群，相対論で必要となるローレンツ群がそれぞれ手短かに紹介されている．

個別の内容を紹介した章ではこの話題も紹介してほしいあの話題にも触れてほしいと感じるところであるが，限られたページ数を考えれば致し方なかろう．他の要望を幾つか挙げてみる．(1) リー代数の複素化．角運動量の表現を考える際に $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ という昇降演算子を物理屋は何気なく定義するが，リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ が実リー代数であることを思い出すと，i 倍するのは‘違法’行為である．しかしリー代数の複素化という手続きがあり，複素化したリー代数の表現と元のリー代数の表現の対応関係の定理があるお陰で‘違法’行為が‘合法’化され正解を導いている．本書の主対象であるコンパクトリー群に対しては結局は問題にならないことではあるが，学生にはこのことをちょっと知っておいてもらいたい．(2) テンソル積表現．物理の学生は角運動量の合成の授業でテンソル積表現を何となく身につけてしまうが，$\boldsymbol{J}^{(1)}+\boldsymbol{J}^{(2)}$ を $\boldsymbol{J}\otimes 1+1\otimes \boldsymbol{J}$ とガッチリ書いて殊更に意識させることは有効であり，量子群を学ぶ際にも役立つ．(3) コーヒーブレイク．著者は博識な方であり，この本を執筆されていると伺ったときに，コーヒーブレイク的なこぼれ話なら色々書けるのにと言われていたので内心楽しみにしていたのだが，残念ながらそのようなコーナーは設けられていなかった．

この稿を書いている現在，2009 年度の授業のシラバスを提出する時期が近づいてきた．上で幾つか要望を書いてしまったが，物理の学生が連続群論を学び始める際の参考書として優れているので，連続群論関係の参考書の筆頭に本書を挙げておこうと思っている．

小竹　悟（信州大学理学部）

量子暗号理論の展開



小芦雅斗・小柴健史共著，B5 判，144 頁，本体 1838 円，サイエンス社

本書のテーマである量子暗号は次世代の暗号技術として注目を浴びており，国内外の国家機関，企業，大学などで盛んに実用化に向けた研究が行われている．事実多くの機関でそのフィールドテストが行われている．本書は，その数学的理論を基礎から分かりやすく解説した画期的な入門書である．

量子暗号という言葉は，様々な意味で用いられるので注意が必要である．狭い意味では量子暗号は Bennett と Brassard によって提案された BB84 プロトコルに代表される量子通信を用いて秘密鍵を共有プロトコル（量子鍵配送プロトコル）を指すことが多い．しかし，広い意味では，量子公開鍵暗号などの量子鍵配送プロトコルに含まれない量子力学的な効果を用いた暗号プロトコル一般を指す．本書では，前半部分で，量子鍵配送プロトコルを基礎からじっくり取り扱い，後半部分では，量子公開鍵暗号プロトコルを扱っている．

量子鍵配送については，その実用化に向けてデバイス開発の研究が盛んに行われているため，量子鍵配送の実現のためには，デバイス開発のみが重要であるとの誤解を受けやすい．しかし，現実の量子通信路には必ずノイズが存在する．この事実は，現在，我々が用いているインターネットなどの現代の通信技術についても同様である．このノイズがあるため，量子鍵配送は単なるデバイス開発の枠に留まらず，数理科学としての理論的側面が極めて重要になるわけである．

例えば，現在，我々がインターネット上であたかも「誤りのない通信」を行っているように見えるのは，「誤りが起きる不確実性を含む通信」に誤り訂正技術を加えているからに他ならない．この誤り訂正技術には様々な数理科学の手法が用いられるため，現在の通信技術も数理科学と無関係ではない．しかし，量子鍵配送の場合，量子通信に通信ノイズがあると，単純にビット反転を訂正すれば，問題なく秘密通信ができるというわけではないのが問題である．なぜなら，通信ノイズに紛れた盗聴が可能であるからである．このため，通信ノイズが全くない場合，量子鍵配送の安全性はほぼ自明に示すことができるにも関わらず，通信ノイズがある現実の量子通信では，量子鍵配送の安全性証明には長い年月を要した．この問題を解決するのが，本書で扱われている量子情報処理の数理的なアプローチである．

量子鍵配送の安全性証明には様々なアプローチがあるが，第 2 章では量子エンタングルメントを用いた安全性証明を扱っている．第 3 章では，量子力学に現れる相補性に注目した安全性証明を扱っている．このように，量子鍵配送の安全性は量子力学の基礎概念である量子エンタングルメントや相補性に基づいており，量子論の根幹の部分に結びついている．逆に，本書を通じて量子鍵配送の安全性を学ぶことで，量子論の基礎である量子エンタングルメントや相補性を従来とは異なった側面から理解することが可能となる．このような量子論の原理的理解と情報科学への応用の双方向的な関係こそ，量子情報の醍醐味であり，本書を通じて読者はその醍醐味をじっくりと味わうことができる．

一方，第 4 章以後は，量子鍵配送の枠組みから離れて，より一般の量子暗号プロトコルを扱っている．現在の公開鍵暗号は素因数分解などの問題の計算量に基づいているため，量子計算機に対しては必ずしも安全ではない．量子計算機に対しても，計算量的に安全性を確保するために提案されたものが量子公開鍵暗号である．第 4 章，第 5 章では公開鍵が古典情報，量子情報の 2 種類の量子公開鍵暗号について扱っている．公開鍵が量子情報となるもののほうが鍵配布のために量子通信路を要するため，実現には困難があるが，公開鍵が古典情報である場合にはない，メリットもある．公開鍵が量子情報である場合，公開する鍵の数を制限した場合，量子鍵配送のように情報理論的にも安全性が証明できるのである．最後に，第 6 章では量子状態を用いた署名技術である量子デジタル署名が扱われている．

このように，本書では，量子鍵配送から，量子公開鍵暗号，量子デジタル署名まで，幅広く量子暗号の理論的側面を扱っており，洋書まで含めても類書が存在しない貴重な書籍である．そのため，本書の読者は本書を通じて量子暗号理論を学ぶことで海外の研究者に対して，大きなアドバンテージを得ることでできるであろう．

林　正人（東北大学大学院情報科学研究科）

「数理科学」は語る

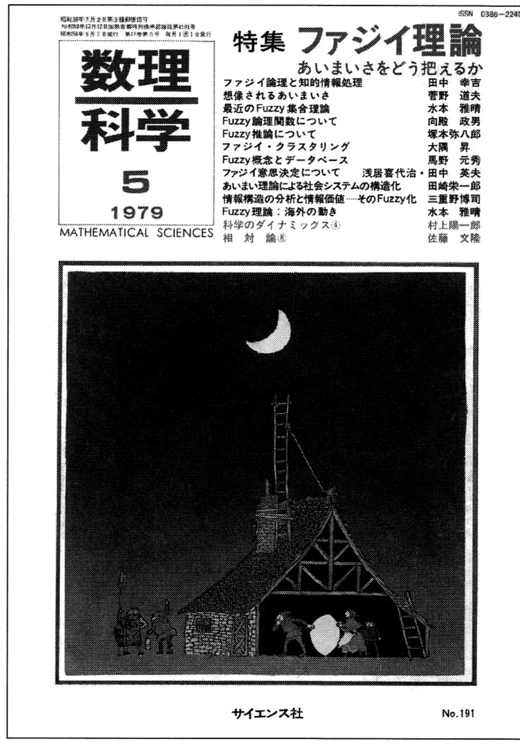
30年前から現代へのメッセージ

菅野 道夫

1979年5月号

本誌1979年5月号に「想像されるあいまいさ」を寄稿してから30年になる．ファジィ理論についての筆者の心は当時と変わるところがない．

拙稿の意は，ファジィ理論が扱う言葉の意味の不明瞭性としてのファジィネスは確率論の蓋然性とは異なる，そして，主観的ファジィネスと客観的確実性の対立は源をたどれば，パスカルの「繊細な精神」とデカルトの「幾何学の精神」の対立に遡及するというところにある．デカルトに始まる近代合理主義の陰に300年も埋もれてきたパスカルの精神は数理科学においてファジィ理論として甦ったと言ってよい．フェルマーと共に確率概念を創始したパスカルは確実でない蓋然性を良しとしたが，その後，この「蓋然」も「確率」（日本語ではあるが示唆するものがある）に変形されてしまったのである．



ファジィ理論は，ザデーによるファジィ集合論の提案（1965）から25年経て，日本のファジィブームにより，陽の目を見ることとなった．ファジィ制御は浄水場の制御，仙台市の地下鉄の運転制御を経て家電製品の制御として花開き，基盤技術となった．更に，地下鉄大江戸線のトンネル，東京湾アクアラインのトンネル掘削制御，カメラのオートフォーカス，車のAT制御などへと発展した．国際ファジィシステム学会（1985）が誕生し，日本ファジィ学会（1989）が発足した．

一方，意思決定の分野にも見るべきものがある．フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンによる確率に基づく期待効用理論（1944）に対して，アレーのパラドックス（1953）のように，この理論では表すことができない人の選好があることが指摘されてきた．また，エルスバーグのパラドックス（1961）は主観確率が存在しない例を示したものであった．これらを解決したのがファジィ測度（1974）によるルベーグ積分の拡張としての非線形なショケ積分（1985）である．2002年にカーネマンはショケ積分を用いた累積プロスペクト理論の提唱（1992）により，ノーベル経済学賞を受賞した．カーネマンの理論の反例もすでに示されているが，こと意思決定理論においてはショケ積分理論なしにはやっていけないといってよい．

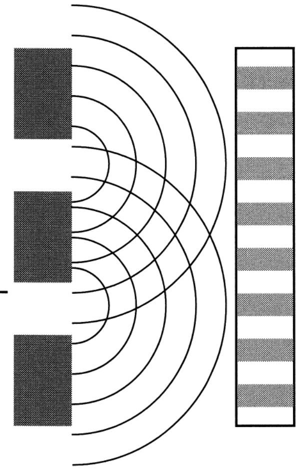
筆者は不確かさを表す形容詞の分類を通じて，人がどのような不確かな様相を認識しているか調べたことがある（1986）．本質的不確かさには「現象の蓋然性」，「言葉の曖昧性」と「観念の漠然性」の3つがある．最初の2つには数理理論が生まれた．しかし，「観念の漠然性」はどうだろう？ これは近代合理主義に対する人間の主観性の最後の砦なのではないか？

この30年，筆者の思い出に強く残るのはファジィネスに関する拙文がセンター試験の国語の問題として採用された（1993）ことである．

（すげの・みちお，同志社大学文化情報学部）

目で見て学ぶ量子力学

第10回 実験でひもとく量子の不思議



アハラノフ・ボーム効果その後

外村　彰

10.1 はじめに

アハラノフ・ボーム（AB）効果は，電子波にとって最も重要な“波動関数の位相”を決める原理であり，まさに量子力学の基本である．それ故，量子力学が支配するすべての分野に顔を出し得る．実際1975年，ゲージ場の実在を実証する実験としてC.N. ヤンが取り挙げたのは，“陽子と中性子の相互作用を決めるアイソスピンの空間で陽子線や中性子線が示すAB効果”であった傍注1．この論文によってAB効果が広く素粒子分野にまで知れわたるようになった．さらに，“重力場のAB効果”や“結晶格子中の自由電子が示すAB効果”など広い分野で議論されている．今後，AB効果は物理学に止まらず，化学，生物学などにも姿を表す可能性を秘めている．

［傍注1］　中性子は，陽子とともに原子核を構成する粒子である．電磁気におけるAB効果は，電子などの電荷をもっている粒子に対してのみ生じる現象なので，電荷のない中性子に対してAB効果は生じないと思われることと思う．T.T. ウーとC.N. ヤンは，*Phys. Rev.* D **12** (1975) 3845の論文で，中性子と陽子を同一の粒子の異なった２つの状態と見なし，その状態を区分するアイソスピンのゲージ場の存在を証明する実験としてAB効果を提案したのであった．

今回は，電子線のAB効果が実証された1986年以降に現れた話題に触れてみたい．

10.2 固体中の電子が示すAB効果

AB効果は，物性分野においても大きな役割を果たすようになる．それは，1980年代に始まった．ISQM（International Symposium on Foundations of Quantum Mechanics in the Light of New Technology）が道を拓き，急速に数を増しつつあった“量子力学の基礎と先端技術を議論する学会”の中から誕生した．当初，「固体内の電子も，干渉現象を起こしAB効果を示すのではないか？」という議論がわき起こった．R. ランダウアー，M. ビュティカー，Y. イムリーなどといったIBMの理論家が中心だった．ところが，間をおかずIBMのR.A. ウェッブが，ナノ構造を有する金属中の電子がAB効果を示すことを見出した1)．ウェッブは，初期のISQMの常連の一人で，この実験結果を1985

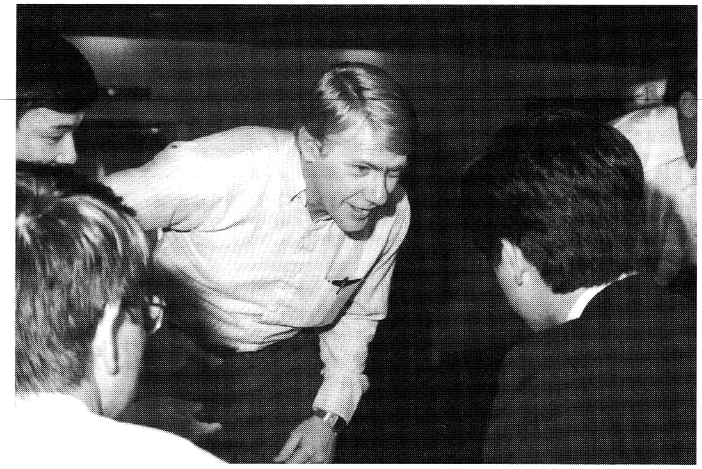


図 10.1　ISQM（1986 年）での R.A. ウェッブ.

年の第 2 回 ISQM で発表し話題をさらった（図 10.1）.

当時，電子線を用いた AB 効果の議論は，主として ISQM で行われていた. AB 効果には，ベクトル・ポテンシャルの実在性，物理法則の局所性，多重連結空間での波動関数の一価性といった量子力学の様々な基本問題が内包されており，面白い議論が戦わされた．第 1 回 ISQM の直前には京大基研で短期研究会が開催され，永宮健夫，高林武彦，久保亮五，宮澤弘成，大貫義郎，高橋秀俊を初めとする多くの先生方が参加した．宮澤先生が「AB 効果では，波動関数は多価関数になってしまい，AB 効果は存在しない」と言うと，高橋先生が「そんな馬鹿なことがあるか」と言われたという．永宮先生も AB 効果は存在しないと主張されたが，その後，これまでの理論では不十分だった前方散乱の計算を行って波動関数の一価性を示した.

第 1 回の ISQM では，“AB 効果” と “中性子干渉” の Post–Symposium Meetings が開催され，Y. アハラノフ，J.A. ホイーラー，J.S. アナンダン，M.A. ホーン，M. ペッシュエキン，O. コスタ・ド・ボルガール，A. ツァイリンガーなどを交え，十分な議論が行われた．これだけ盛んな議論が行われていたにも関わらず，固体内の AB 効果の実験が日本で行われなかったのは，大変残念で，悔しい思いをした．かつて，真空管からトランジスターへの道を拓いたアメリカならではの発想と思って諦め，自分を納得させた覚えがある．しかし，ISQM での議論が，AB 効果への関心を呼び，それがミクロな構造を持つ金属中の電子が干渉するというメソスコピック物理の誕生にも貢献を果たしたことは疑いない.

10.3 ISQM 発足の顛末

この原稿を提出する直前の 2008 年 12 月 14 日，ISQM を誕生させ，30 年近くもそれを見守っていただいた中嶋貞雄先生（元東大物性研所長）が亡くなら

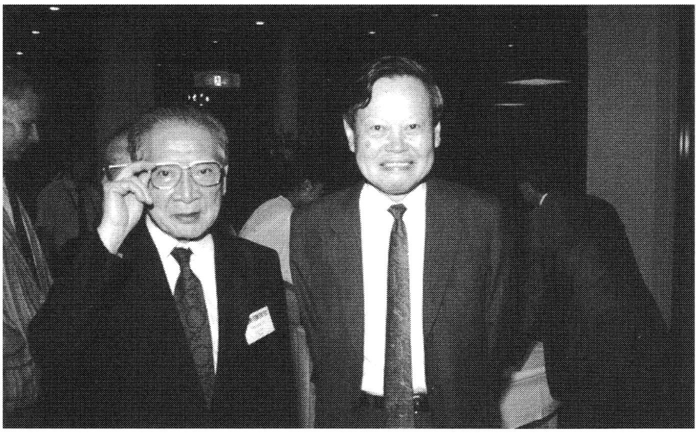


図 10.2　ヤン先生と中嶋貞雄先生（1992年8月，ISQM）.

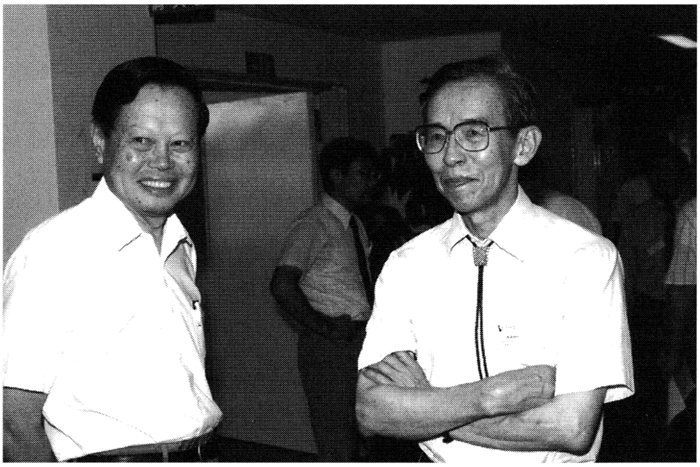


図 10.3　ヤン先生と久保亮五先生（1986年8月，ISQM）.

れた（図 10.2）．基礎物理の国際会議を一企業が支援しようという点で，会議の発足にご苦労をなさった．

量子力学の基礎に造詣が深い中嶋先生はこの学会に大変興味を示され，一旦は物性研の主催で開催する提案を行った．しかし，物性研の教授会で否決され，結局，中嶋先生が個人的立場で，東大・京大・名大などの先生方を集めて組織委員会を作ることになった．この辺りの事情は，中嶋先生のお通夜で弔辞を述べ，ISQMのチェアーマンを引き継いだ福山秀敏先生から伺った．

久保亮五先生やC.N. ヤン先生（図 10.3）も初めからこの会に積極的に参加されて会を盛り上げてくれた．ISQMは3年毎に開催され，2008年8月の会議で9回目を迎え，実に25年間も続くことになった．中嶋先生は，チェアーマンを福山先生に譲られてからも，会を見守り続け会議にも出席されていたが，第9回の会には欠席され心配していた．

この学会のお陰で，私は会社の中で大きな顔をして基礎研究をやらせてもらうことができた．さらに，日本だけでなく世界の優れた物理の先生方とお近づ

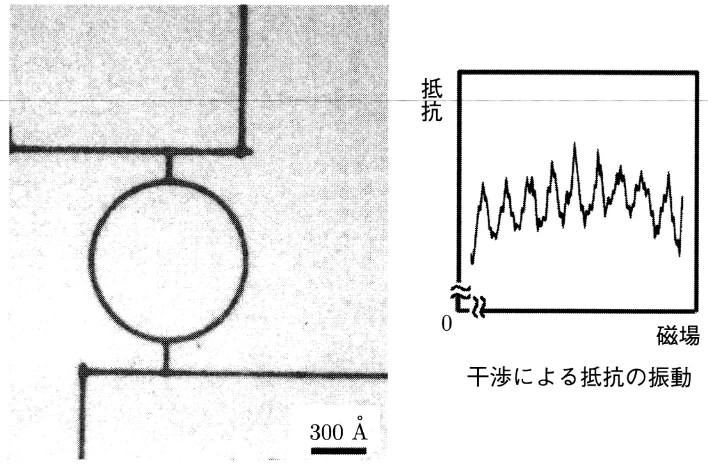


図 10.4　金属中電子の AB 効果．リング状回路を通る電流は，リングの中を通る磁場によって変化する．

きになれ，私の生涯の財産となった．

10.4 ウェッブの実験

ウェッブは，極めて細いリング状の回路（図 10.4）に電流を流すと，リングの右側を通る電子と左側を通る電子が出会ったときに，干渉を起こすことを見出した[傍注2]．これまで，100 個の電子を入れたら，たとえ二股に分かれていたとしても，出会ったときには 100 個の電子が出てくるのが当然であった．ところが，1 個の電子が波となって 2 つに分かれ，出会ったときに波の山と山が重なれば，干渉によって 110 個になり，山と谷が重なると 90 個になったりする[傍注3]．実際，リングの中に磁束を通して電子の位相差を AB 効果で変化させると，全体の電流，ここでは抵抗が，大きくなったり小さくなったりすることが実証された．これまでたとえ微細回路であっても，その中の電子は，オームの法則に従う古典的な粒子であった．ところが，この実験によって，電流も波として振る舞うことが示され “メゾスコピック系物理”[傍注4] と呼ばれる新しい分野が拓かれていった．

［傍注 2］ 干渉と言っても，固体中の電子の場合には，完全にきれいな 2 つの波の干渉が起こっている訳ではない．電子の波がリングを半周する間に散乱されるが，干渉性は保っているので AB 効果を示す．

［傍注 3］ リングの入口と出口で電子の数を実際に測ってしまうと干渉現象は起こらないので，正確な表現とは言えない．正しくは，リングを通る磁束を増やすと，抵抗が増えたり減ったりする．

［傍注 4］ マクロとミクロの中間領域での物理のことを指す．ウェッブが作ったリングは原子に比べると十分大きく，かと言ってマクロな大きさでもなく，ちょうど，その中間にある．ただ大きさだけの問題ではなく，この領域で電子の波の振舞いが観測できることが重要である．

リング状の回路だけではない．同じトポロジーを持つチューブに対しても AB 効果が起こることが，1999 年に示された[2)]．カーボンナノチューブの長さ方向の 2 点間の電流，とは言っても，チューブなので，まっすぐの最短の道もあれば，チューブを右回りする道も，左回りする道も，何回もぐるぐる回る道もある．チューブの軸方向に磁場を印加してチューブの中に磁束を通すと，それらの道の間で位相差が生じ，その結果，流れる電流が磁束によって変化するという結果が得られたのである．

“金属のカーボンナノチューブ” に強い磁場が加わると半導体に変わるという結果も報告された[3)]（図 10.5）．これはカーボンナノチューブ内部の電子の波動関数に AB 効果による位相因子がつけ加わってバンド構造が変化したためで

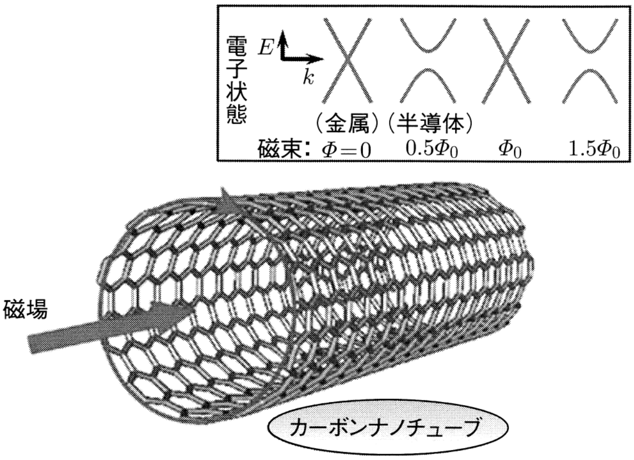


図 10.5　磁場をかけると，AB 効果によって電子状態が変化し，伝導体が半導体になる．

ある．

かくして AB 効果は，今や二重スリットの実験と並んで，量子力学の神髄を表す現象と見なされるようになった．

10.5 AB 効果は古典的に説明できる？

「電子に力が加わっていないにも関わらず，2 本の電子線の間には位相差が生じる」という AB 効果は，純粋に量子力学的効果である．古典力学には対応する現象が存在しない．ところが，1965 年という大昔から最近に至るまで，次のような主張がくり返し主張されてきた．

AB 効果は，半古典的に導出できる．実際，電磁コイルの左右を通る電子には，“これまで知られていない力” が働き，加速されたり減速されたりする．加減速されることによって電子の波長が異なってくるので，これが AB 効果を生じる．これまで，電子に力が加わっていないことは実験的に示されていない．電磁気学に，いまだに議論になるような問題が残っているのかと思う読者も多いかと思う．実は，電磁気には面白い問題がかなり残されている．

電場も磁場もない空間を通る電子に一体どんな力が働くのだろうか？ まず B. リーボビッツ[4)]の主張を紹介しよう．

入射電子の周りには回転磁場 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{elec}}$ が発生するが，その磁場がコイルの中に侵入してコイル磁場 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{coil}}$ に重なると，磁場のエネルギーは $(\boldsymbol{H}_{\mathrm{elec}}+\boldsymbol{H}_{\mathrm{coil}})^2$ に比例する．このため，相互作用のエネルギーは $\boldsymbol{H}_{\mathrm{elec}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{coil}}$ に比例する．コイルの中での $\boldsymbol{H}_{\mathrm{elec}}$ の値は，電子の位置に依存するので，電子にも力が働く．さらに電子がコイルの左と右を通過する場合，力の向きは逆になり，一方では加速し他方では減速することになる．それがちょうど AB 効果の位相変化を生じる．

T.H. ボイヤー[5)]によれば，入射電子の磁場は，コイル内部の自由電子にロー

レンツ力を及ぼす．そしてその反作用として入射電子が同様の加減速を受けると言う．

つまる所，「入射電子の磁場がコイルの中に侵入して，コイル中の自由電子や磁場に影響を与え，その反作用として，入射電子は進行方向に加減速される．それを位相変化に変換してみると AB 効果が説明できる」という主張である．

それなら，コイルの中に入射電子の磁場が入らなければ問題はないはずだと思うだろう．実際，我々の実験で使ったサンプルは，ドーナツ状の磁石を超伝導体で取り囲んでいる．この実験では，マイスナー効果によって入射電子の磁場は磁石の中に侵入していないように思うが，それでも AB 効果が検出されている．だが，1 個の電子の速度は光速の 1/2 と非常に速いので，超伝導体で囲んでもシールドできていない可能性もあるかも知れない．

しかし，良く考えてみると，1 個の電子が生じる磁場を計算して，果たして AB 効果の実験に即した計算になっているのだろうかという疑問は残る．この実験で，1 個の電子が生じる磁場と言われてもイメージが湧いてこない．電子の波束は 2 つに分かれてコイルの両側をまたぎ，後方で干渉する．実際，1 個の電子の空間的な広がり（空間的な可干渉距離）は 50 μm もあるので，コイルの右を通ったのか左を通ったのか，さらにコイルからどれだけ離れた所を通ったのか，分からない．進行方向にも，1 個の電子は 2 μm もの広がり（時間的な可干渉距離）があるので，いつ通り過ぎたのかもはっきり分からない．それなのに，右を通る電子は加速され，左では減速されると言われても，訳が分からなくなってしまいそうだ．コイルの中の電子に，どのようなローレンツ力が加わるのか分からない．

10.6 AB 効果の古典論の実験—電子に力が働いているか否か？—

「AB 効果の実験で，電子は本当に力を受けているのだろうか？」 電子がコイルの近くを通る際に加減速されるとすると，電子が電子源を出て検出器に至るまでの飛行時間を測定すれば，それを確かめられるはずである．実際，こうした実験が最近 H. バテラーンたちのグループによって行われた[6]．コイルの両側を通る電子の飛行時間に時間変化 Δt がない場合には，力による AB 効果の理論は排除できるはずである．AB 効果を説明できる時間変化 Δt は，$\Delta t = e\Phi/(mv_0^2)$ で与えられる．但し，e, m, v_0 は電子の電荷，質量および平均速度，Φ はコイル内部の磁束である．

飛行時間型（time of flight）実験は，パルス電子線を使って可能になった．パルス電子線は，フェムト・セカンドのレーザーパルスを電界放出チップの先端に当てて発生させる．それをドーナツ状のコイルの中を通過させる．コイルの芯に鉄の棒が通っており，磁場は外部に漏れないようになっている．さらに，電子の通路を囲む円筒シールドを置いて，不必要な外部磁場を除いてある．電子の到着はチャンネルプレートで検出され，飛行時間（time of flight）スペクトルが得られる．

コイルに流す電流の関数として飛行時間の差 Δt を測定した結果，電子に力は働いていないことが示された．この実験そのものも面白いが，パルス電子線が実現され，量子力学の基礎現象とりわけ思考実験にも実証の道が拓かれるのではないかと思い，この実験を Nature で紹介した[7]．

電子に力が働いていないことが実証されたことによって，AB 効果はまさしく純粋に量子力学的効果であることが分かった．

参考文献

1) R.A. Webb, S. Washburn, C.P. Umbach and R.B. Laibowitz: *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 2696–2699.
2) A. Bachtold, C. Strunk, J.P. Salvetat, J.M. Bonard, L. Forro, T. Nussbaumer and C. Schönenberger: *Nature* **397** (1999) 673–675.
3) E.D. Minot, Y. Yaish, V. Sazonova and P.L. McEuen: *Nature* **428** (2004) 536–539.
4) B. Liebowitz: *Nuovo Cimento* **38** (1965) 932–950.
5) T.H. Boyer: *Found. Phys.* **32** (2002) 41–49.
6) A. Caprez, B. Barwick and H. Batelaan: *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 210401/1–4.
7) A. Tonomura and F. Nori: *Nature* **452** (2008) 298–299.

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第4回

二体問題

香取 眞理・中野 徹

今回のテーマは二体問題である．重心運動と相対運動という 2 つの独立な運動への分離を，古典力学と量子力学の問題でそれぞれ行ってみる．そのあと，2 原子分子理想気体の量子統計を議論する．**分離**という操作は，物理現象を「分類することによって理解する」際の，基本的な方法である．

4.1 重心座標と相対座標

いくつもの物体が互いに力を及ぼし合って動いている．その運動をどのようにしたら最も正確に記述できるだろうか．**多体問題**と総称されるこの問題の研究は，物理学のメインテーマである．この研究課題に対してどのような姿勢で臨むかによって，物理学の研究分野が分類されていると言うことができるかもしれない．多体問題を解決するための方針として，おそらく最も分かりやすいものは，相互作用の絡み合いをほどいて，なるべく簡単な運動の重ね合わせに帰着させて問題を解こうというものであろう．

相互作用している物体の個数が 2 つだけの場合は，特に**二体問題**と呼ばれる．この場合には，2 つの物体の運動を記述する力学変数をうまく変数変換することによって，問題を 2 つの一体問題に完全に分離することが可能である．分離された 2 つの一体問題をそれぞれ解くことによって，二体問題は完全に解決される．このことを，まずは古典力学の例題で見てみることにしよう．

問題 4.1　質量が m_1 と m_2 の 2 つの物体が，自然長 a，バネ係数 k のバネでつながれている．2 つの物体はともに，ある線上を 1 次元的に運動するものと仮定する．このとき，この二体問題を独立な 2 つの一体問題に分離しなさい．

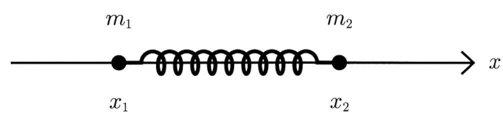


図 4.1　バネでつながれた 2 個の物体．

解答　図 4.1 のように左の物体の座標を x_1，右の物体の座標を x_2 とすれば，ニュートンの運動方程式は，2 連立微分方程式

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - a), \tag{4.1}$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - a) \tag{4.2}$$

となる．(4.1) 式と (4.2) 式を辺々加えると

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1x_1 + m_2x_2) = 0$$

となる．また，(4.2) 式の両辺を m_2 で割ったものから，(4.1) 式の両辺を m_1 で割ったものを辺々引くと

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) = -k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)(x_2 - x_1 - a)$$

が得られる．二体系の総質量を $M = m_1 + m_2$ と書いて，変数 X と x を

$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M}, \quad x = x_2 - x_1 \tag{4.3}$$

で定義する．上の加減の計算より，

$$(x_1, x_2) \to (X, x)$$

という変数変換をすると，連立方程式 (4.1), (4.2) は

$$M\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \tag{4.4}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-a) \tag{4.5}$$

という2つの独立な微分方程式に変換されることが示せたことになる．ただし，m は

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{4.6}$$

によって定義される質量（**換算質量**）である．■

2つの質点の位置ベクトルが $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ と $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ で与えられているとき，

$$\boldsymbol{X} = \frac{m_1\boldsymbol{x}_1 + m_2\boldsymbol{x}_2}{M}, \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 \tag{4.7}$$

で定義される2つのベクトルをそれぞれ**重心座標**と**相対座標**という．2つの物体の運動は一般に，重心運動と相対運動に分離することができるのである．重心座標と相対座標の定義式 (4.7) を，$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ から $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x})$ への線形変換を表す式と見なすことができる．古典力学の場合，二体問題における重心運動と相対運動への分離は，一般にこの座標変換によってなされるのである．

2つに分離されたあと，問題を解くのは容易である．(4.4) 式より直ちに，重心は等速直線運動をすることが分かる．また (4.5) 式は，$y = x - a$ とおくと $d^2y/dt^2 = -(k/m)y$ となるので，相対座標 x はバネの自然長 a を中心に角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ で単振動することが分かる．この2つの運動はそれぞれ一般に，$X = b_1 t + b_2, x = a + c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$ と表せるので，(4.3) の逆変換 $(X, x) \to (x_1, x_2)$ を行うことにより，2つの物体の運動は

$$x_1 = b_1 t + b_2 - \frac{m_2}{M}(a + c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t),$$

$$x_2 = b_1 t + b_2 + \frac{m_1}{M}(a + c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t)$$

と定められる．（未定係数 b_1, b_2, c_1, c_2 は初期条件より決まる．）

4.2 変数分離法

次に量子力学における二体問題を解いてみよう．

問題 4.2　質量が m_1 と m_2 の原子が結合した2原子分子を考える．2つの原子間のポテンシャル・エネルギーは $V(r) = kr^2/2$ で与えられているものとする．前問と同様に問題を簡単化して，2つの原子はともにある線上を1次元的に運動しているものとする．この2原子分子のエネルギー固有値を求めなさい．

解答　分子を構成する2原子のうちの一方の原子の座標を x_1，他方の原子の座標を x_2 とすると，この2原子分子に対するハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + V(|x_2 - x_1|) \tag{4.8}$$

で与えられる．2原子分子の波動関数を $\Psi(x_1, x_2)$ と書き，エネルギー固有値を E とすると，**時間に依存しないシュレーディンガー方程式**（**波動方程式**）は

$$\mathcal{H}\Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2) \tag{4.9}$$

となる．問題 4.1 の解法と同様に，重心座標 X と相対座標 x を (4.3) 式で導入する．この定義式より，x_1 と x_2 に関する偏微分と X と x に関する偏微分との間に

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.10}$$

という関係式が成り立つことが導ける[*1)]．以前に (4.3) 式を $(x_1, x_2) \to (X, x)$ という変換を与えるものと見なしたのと同様に，(4.10) 式は偏微分の対の変換

*1)　偏微分をするときには，どの変数が対をなしているかに注意すること．今の場合は (x_1, x_2) が対をなし，(x, X) が対をなしている．この対構造より $\partial/\partial x_1 = (\partial X/\partial x_1)(\partial/\partial X) + (\partial x/\partial x_1)(\partial/\partial x)$ となる．これに (4.3) 式より得られる $\partial X/\partial x_1 = m_1/M$, $\partial x/\partial x_1 = -1$ を代入すれば，(4.10) の上式が得られる．(4.10) の下式についても同様．

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \to \left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

を定めるものであると考える．これらの変換によって，ハミルトニアン (4.8) は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \\ &\quad -\frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V(|x|) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(|x|).\end{aligned}$$

となる．ここで，m は (4.6) 式で導入された換算質量である．つまり，解くべき偏微分方程式は

$$\begin{aligned}&\left\{-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(|x|)\right\}\Psi(X, x) \\ &\quad = E\Psi(X, x) \qquad (4.11)\end{aligned}$$

となった．

$$\Psi(X, x) = \varphi(X)\psi(x) \qquad (4.12)$$

とおいて，これを (4.11) に代入した後，両辺を $\varphi(X)\psi(x) \neq 0$ で割る．すると

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\varphi(X)}\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2\varphi(X)}{dX^2} \\ &\quad +\frac{1}{\psi(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(|x|)\psi(x)\right] = E\end{aligned}$$

という等式が得られる．左辺の第 1 項は X のみの関数, 第 2 項は x のみの関数である．それらの和が常に定数 E であるためには，2 つの項は各々定数でなければならない．つまり，$E = E_{\text{重心}} + E_{\text{相対}}$ として

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2\varphi(X)}{dX^2} = E_{\text{重心}}\varphi(X), \qquad (4.13)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E_{\text{相対}}\psi(x) \qquad (4.14)$$

となる．方程式 (4.13) は重心運動に対する波動方程式であるが，質量 M の自由粒子に対するものに等しく，解は平面波で与えられる．運動量が保存されるからそれを P とすれば，$\varphi(X) \propto \mathrm{e}^{iPX/\hbar}$ と書ける．エネルギーは連続スペクトルをもつ：

$$E_{\text{重心}} = \frac{P^2}{2M}, \quad -\infty < P < \infty. \qquad (4.15)$$

与条件より $V(|x|) = kx^2/2$ なので，相対運動に対する方程式 (4.14) は，角振動 $\omega = \sqrt{k/m}$ の**調和振動子**の波動方程式に等しい．よってエネルギー固有値は，離散的な値

$$E_{\text{相対}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (4.16)$$

をとる．結局, 2 原子分子のエネルギー固有値は, 連続スペクトルをもつ重心運動のエネルギー (4.15) と相対運動が行う単振動の離散的なエネルギー固有値 (4.16) との和

$$E = E_{\text{重心}} + E_{\text{相対}} \qquad (4.17)$$

で与えられることになる． ■

古典力学における二体問題は，(4.1), (4.2) という連立方程式を 2 つの独立な方程式 (4.4), (4.5) に分離することによって解くことができた．これに対して，量子力学では，2 変数の偏微分方程式 (4.9) を 2 つの常微分方程式 (4.13), (4.14) に分離することによって解くのである．その結果，二体系のエネルギー固有値は 2 つの一体問題の**固有値の和** (4.17) で与えられ，二体系の波動関数は 2 つの一体**固有関数の積** (4.12) で与えられるのである．この解法を**変数分離法**と言う．

注　位置と運動量の間の正準交換関係 $[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$ は，運動量を $\widehat{p}_j = -i\hbar\partial/\partial x_j, j = 1, 2$ というように微分演算子で表現することによって実現できる（**正準量子化**）．(X, x) の対に対しても $\widehat{P} = -i\hbar\partial/\partial X, \widehat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ とすれば，(4.10) 式は $\widehat{p}_1 = (m_1/M)\widehat{P} - \widehat{p}$, $\widehat{p}_2 = (m_2/M)\widehat{P} + \widehat{p}$ と書き直せる．これは運動量演算子の対の変換

$$(\widehat{p}_1, \widehat{p}_2) \to (\widehat{P}, \widehat{p})$$

を定める．この変換式より

$$\widehat{P} = \widehat{p}_1 + \widehat{p}_2, \quad \frac{\widehat{p}}{m} = \frac{\widehat{p}_2}{m_2} - \frac{\widehat{p}_1}{m_1}$$

が得られる．これらは，(4.3) 式を時間微分して得られる古典的な等式

$$M\dot{X} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2, \quad \dot{x} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$$

と綺麗に対応している.「変数の分離」という操作と「正準量子化」という操作は可換なのである.

4.3 2 原子分子の理想気体の比熱

多体問題に対して，相互作用している物体の個数を N と書くことにする．$N=2$ の二体問題は，一般に，2 つの一体問題に分離することによって解くことができることを見てきた．ところが $N \geq 3$ になると，とたんに一筋縄ではいかなくなる．連星系の周りの惑星の運動は重力三体問題と呼ばれる難問中の難問である．自由度が数個以上になるとカオスが出現するからである．他方，相互作用が特別な性質を保持するようにすると，任意の N に対して多体問題が解ける場合がある．この特別な場合は可積分系と呼ばれ，盛んに研究されている．ところが，$N=2$ 以外でも一般的に多体問題を「解く」ことができる場合があるのである．それは $N=\infty$ の場合であり，一般的解法とは**統計力学**のことである．ここでは，無限個の 2 原子分子が絶対温度 T の熱平衡状態にある場合を考え (**2 原子分子理想気体**)，系の比熱を計算してみよう．そのための準備として，まず次の問題を解いてみる．

> **問題 4.3**　絶対温度 T の熱平衡状態にある調和振動子の系に対して，調和振動子 1 個あたりの比熱を求めなさい．ただし，調和振動子は量子力学的に取り扱いなさい．

解答　調和振動子の角振動数を ω とすると，振動のエネルギーは

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (4.18)$$

のように量子化されている．調和振動子のエネルギーが E_n である確率は $P(E_n) = \mathrm{e}^{-E_n/(k_\mathrm{B}T)}/Z_{\text{振動}}$ である．ここで k_B はボルツマン定数であり，分母は

$$Z_{\text{振動}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-E_n/(k_\mathrm{B}T)}$$

で定義され，**分配関数**と呼ばれる．まず，調和振動子 1 個あたりの内部エネルギー U を求める．これはエネルギーの平均値 $U = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P(E_n)$ で与えられるが，$\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ とおくと

$$U = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \mathrm{e}^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta E_n}} = -\frac{\partial \ln Z_{\text{振動}}}{\partial \beta}$$

なので，分配関数が求められれば，それを対数微分すれば直ちに得られることが分かる．ところが，調和振動子ではエネルギー準位が (4.18) 式で与えられたように等間隔なので，分配関数は初項が $\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega/2}$，公比が $\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}$ の等比無限級数の和に他ならない．したがって

$$Z_{\text{振動}} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}}$$

である．よって内部エネルギーは

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[-\frac{\beta\hbar\omega}{2} - \ln(1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})\right] \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1}. \end{aligned}$$

となる．これより比熱は

$$c_{\text{振動}} = \frac{dU}{dT} = \frac{(\beta\hbar\omega)^2\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega}}{(\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \qquad (4.19)$$

と求められる．■

エネルギー準位の間隔 $\hbar\omega$ を固定して，U の温度依存性を見てみよう．低温と高温の極限では，それぞれ次のようである．

- 低温極限（$\beta\hbar\omega \gg 1$，つまり $T \ll \hbar\omega/k_\mathrm{B}$ のとき）：$U \simeq \hbar\omega/2 + \hbar\omega\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}$.
- 高温極限（$\beta\hbar\omega \ll 1$，つまり $T \gg \hbar\omega/k_\mathrm{B}$ のとき）：$U \simeq k_\mathrm{B}T\left[1 + (\beta\hbar\omega)^2/12\right]$.

高温では古典統計力学でお馴染みの $k_\mathrm{B}T$ に漸近する．低温では**基底エネルギー**（**零点エネルギー**）$\hbar\omega/2$ に $\hbar\omega\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}$ が加えられた形である．基底状態にある振動子は熱浴によってエネルギーが $\hbar\omega$

だけ高い**第 1 励起状態**にときどき励起される．その励起の頻度は**ボルツマン因子** $\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}$ で与えられるというわけである．縦軸に U，横軸に T をとると，図 4.2 のようになる．

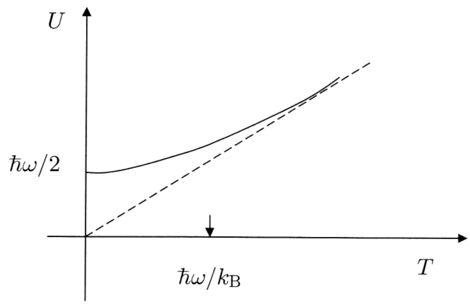


図 4.2 振動モードの内部エネルギーの温度依存性．

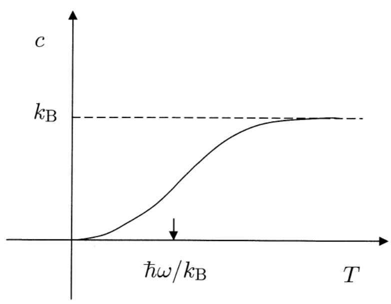


図 4.3 振動モードの比熱の温度依存性．

他方，比熱の温度依存性をグラフにすると，図 4.3 のようになる．(i) $T \gg \hbar\omega/k_\mathrm{B}$ の高温極限では $c_{振動} = k_\mathrm{B}$ であり，(ii) $T \ll \hbar\omega/k_\mathrm{B}$ の低温極限では $c_{振動} = (\beta\hbar\omega)^2\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}k_\mathrm{B}$ である．低温 ($\beta \to \infty$) で指数的に零になるこの比熱の式は，熱浴からもらえるはずの熱エネルギーの値 $k_\mathrm{B}T$ が小さくなりすぎて，第 1 励起状態に励起するのにも足りず，結局励起されることもなく，熱浴から熱エネルギーをもらうこともないという状況を表している．低温では，振動というモードに熱エネルギーが分配されることがなくなり，そこに蓄えられる熱容量も零となる．

さて，それでは次の問題に取り組むことにしよう．

> **問題 4.4** 2 原子分子の 1 分子あたりの比熱を計算して，その温度依存性を調べよ．ただしこの問題では，分子は 3 次元的な運動をするものとする．

解答 (4.7) 式で与えられる重心座標 $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)$ と相対座標 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ で，3 次元空間を運動する 2 原子分子のハミルトニアンを表すと

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\boldsymbol{X}} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\boldsymbol{x}} + V(x)$$

である．ただし，2 つの**ラプラシアン**はそれぞれ $\Delta_{\boldsymbol{X}} = \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2 + \partial^2/\partial Z^2$ と $\Delta_{\boldsymbol{x}} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ である．重心の波動方程式は (4.13) 式で $d^2/dX^2 \to \Delta_{\boldsymbol{X}}$ としたものであり，運動量を $\boldsymbol{P}$=一定とすると，解は $\varphi(\boldsymbol{X}) \propto \exp(i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{X}/\hbar)$ で与えられる．他方，相対運動の波動方程式は 3 次元極座標 $\boldsymbol{x} = (r, \theta, \phi)$ を用いて

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] + V(r)\psi = E\psi$$

となる．$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ とおいて第 4.2 節で述べた変数分離法を用いると，動径成分に対する方程式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r)) - \frac{\lambda}{r^2}\right]R = 0$$

と，角度成分 θ, ϕ に対する方程式

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] + \lambda Y = 0$$

に分離できる．$\lambda = l(l+1)$ のとき，$Y(\theta, \phi)$ は球調和関数になる．このとき動径成分の方程式は，$R(r) = \chi(r)/r$ とおくことにより

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi = E\chi$$

となる．これは**有効ポテンシャル** $V_{有効}(r) = V(r) + l(l+1)\hbar^2/(2mr^2)$ の中の 1 次元運動に対する波動方程式である．

$V(r)$ の具体的な形は必要でない．2 個の原子が結合して分子が形成されるためには両者の間に引力が働いていなければならない．しかし原子が接近しすぎると反発する．したがって，$V(r)$ は図 4.4 のようにある値 r_0 で極小値をとるはずであ

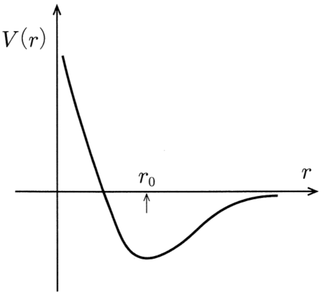


図 4.4　相互作用ポテンシャルの振舞い.

る. $V(r)$ を極小 r_0 の周りで 2 次まで展開する：

$$V_{有効}(r) = V(r_0) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr_0^2} + \frac{1}{2}k(r-r_0)^2.$$

厳密に言うと r_0 の値は l に依存するが，ここではその依存性を無視することにする．すると極小値 $V(r_0)$ は定数とみなせるので，この値をエネルギーの原点にとることができる．こうして，相対運動のエネルギー固有値は

$$E_{n,l} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2I}l(l+1) \quad (4.20)$$

と定められる．ここで，$\omega = \sqrt{k/m}$. また，$I = mr_0^2$ は質量 m，半径 r_0 の剛体球の慣性モーメントに等しい．(4.20) の第 1 項は 2 原子の**振動エネルギー**であり，第 2 項は 2 原子の**回転エネルギー**である．$n = 0, 1, 2, \cdots, l = 0, 1, 2, \cdots$ であり，ともに離散的である（量子化されている）．

前者の比熱への寄与 $c_{振動}$ は，問題 4.3 で求めた (4.19) 式に等しい．後者の比熱への寄与 $c_{回転}$ を求めるには，回転運動に対する分配関数

$$Z_{回転} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp\left[-\frac{\beta\hbar^2 l(l+1)}{2I}\right] \quad (4.21)$$

を評価すればよい．ここで $(2l+1)$ は同じ l に含まれる**縮退度**である．これから回転運動の内部エネルギー $U_{回転} = -\partial \ln Z_{回転}/\partial\beta$ を求め，それを T で微分すれば比熱が求められる：$c_{回転} = dU_{回転}/dT$. 低温 $T \ll \hbar^2/(2k_B I)$ では，$Z_{回転} \simeq 1 + 3e^{-\beta\hbar^2/I}$ なので，$c_{回転} \simeq 3k_B(\beta\hbar^2/I)^2 e^{-\beta\hbar^2/I}$. 高温極限では，(4.21) の和は積分

$$Z_{回転} \simeq \int_0^\infty 2x e^{-\beta\hbar^2 x^2/(2I)}dx = \frac{2I}{\beta\hbar^2}$$

で近似できる．このことから直ちに，$c_{回転} \simeq k_B$ が導かれる．■

最後に，例として酸素分子を取り上げて，比熱の温度依存性の結果をまとめてみよう．M を酸素原子の質量，r_0 を酸素原子間の距離として計算すると，$\hbar^2/(2k_B I) \fallingdotseq 2.1\,\mathrm{K}$ となる．一方 $\hbar\omega/k_B \fallingdotseq 2,230\,\mathrm{K}$ である．したがって次のように分類できる：

- $T \ll 2.1\,\mathrm{K}$ では，重心運動しか寄与しないので $c = 3k_B/2$ である．
- $2.1\,\mathrm{K} \ll T \ll 2,230\,\mathrm{K}$ では，重心運動と回転運動が寄与して $c = 5k_B/2$ となる．
- $T \gg 2,230\,\mathrm{K}$ では振動モードも寄与して $c = 7k_B/2$ となる．

もっとも，高温になると 2 原子分子は 2 個の原子に解離してしまうはずである．O_2 の解離温度は約 $59,000\,\mathrm{K}$ であるから，それ以上の温度では $c = 3k_B$ が現実的な答である．

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



朝永さんのひとこと

氷 上　忍

1. はじめに

いささか禅問答的な“研究者の道とは何か”という題で書けとのことだが，そもそも「物理の道しるべ」の「物理」とは何なのかがよくわからない．朝永振一郎著の『物理学とは何だろうか』[1]を最後まで読み終えてないせいであるかも知れない．よく言われるが，物理を研究している人には，物理がわからないので研究する人も結構あるのである．したがって，物理の研究者の道など書く資格は到底ないのだが，今までに読んだ本や出会った人の思い出や訪問した外国の研究所のことなどを中心に，思いつくままに思い出話を書けば許してもらえるのではないかと思って筆をとることにした．

2. いろいろな道

生まれたときから病弱で，人と一緒に遊び回ることが大の苦手であった．本を読むことは好きであった．父親が学者であったので，家は本だらけであった．一日中家に居ることが多く，外国語の百科事典の図を眺めたりしていた．近くの寺で紙芝居を見て遊んだりもしていたが，その紙芝居をやるお爺さんが，「湯川さんはノーベル賞をもらったが，わたしはノンビリ賞です」とか言っていたのを覚えている．

そんな時代だったので，もちろんテレビなどない時代である．MP と書かれたヘルメットをかぶった進駐軍のアメリカ憲兵のジープが家の近くに来ることもあった．いくつかの遊びに熱中していた．一つは，紙で作った円盤に楊枝を刺して独楽を作り，独楽の先にインクをつけて紙の上で回転させ，そのインクが書く軌跡を見ると，これが思わぬ複雑な線を描くというものである．もう一つは紙で作った相撲取りを紙箱で作った土俵の上で紙箱を叩いて相撲を取らせるというもので，面白かった．

府立一中と昔いわれた都立高校に入学したが，理由は祖父，父ともこの一中だったせいである．この高校には伝統的な名物先生が多く，数学を岡田章さんに習った．（この高校の慣わしで，先生はさん付けで呼んでいた．）この岡田さんは第一高等学校（後の東大教養学部）の教授であったが，その後この高校に移られた．最近出版された，志村五郎著『記憶の切繪図』[1]にこの一高のときの岡田さんの話が父に習った話と共に出てくるので驚いた．この岡田さんは志村さんの本に書いてあるように，公理系を重視することが多かったように思うが，いかにも数学者は自由であるという雰囲気に溢れていた．この岡田さんから，注目すべき二名の数学者の名前を教わった．一人はラマヌジャンで，あと一人は志村五郎であった．いつも着用

の黒い三つ揃いの服と腰からの鎖つきの金時計は何か明治時代の小説に出てくる学者を思わせた．

この高校では，水褌をして遠泳をしたり，楽器を演奏したり，第二外国語もあり，フランス語を勉強した．とにかく色々することが多かった．本が好きなので，学校帰りに神田の古本屋によって色々な本を立ち読みした．最初に物理学者に出会ったのは，この高校の文化祭で講演した朝永さんである．確かノーベル賞受賞の前後だったのではないかと思うが，大勢の学生の前でにこにこして，粋な話ぶりで聴衆をまるで寄席にいるような感じで魅了した．

1966年に東大教養学部理科1類に入学した．囲碁に熱中したり，いろいろな本を読んでいたように思う．この教養学部では入学1年半後に進学振り分けがあり，それぞれがいろいろな道に進むことになる．同じクラスには赤尾和男さんがいて，赤尾さんは，物理は“つぶし（潰し）”が利くが，数学は“つぶし”が利かないという親の意見を披露してくれた．（“つぶし”というのは，金属をつぶすことから来ていて，銅のやかんをつぶして銅の鍋を作るなどを意味し，転職できることを指す．）この進学振り分けの後，赤尾さんとは会っていない．小平邦彦さんとともに学習院大学に移り数学の道を進んだと聞いている．（時々，小平さんの英語の本を手にとることがあるが，この本の翻訳者が赤尾さんである）．ポアンカレのことを解説した天体力学や解析力学の本が面白かったので，私のほうは，数学も物理もできるという創設されて間もない駒場にある基礎科学科にした．

この進学した2年後半になってから，量子力学と統計力学を学んだが，面白かった．1年のときに習う熱力学は良くわからず，その論理的組み立てを理解するのに苦労させられたが，統計力学で初めて熱力学が理解できた．今ほど物理の本が多くあるわけではなく，当時はランダウ・リフシッツのシリーズを読むことが普通であった．特にランダウ・リフシッツの統計力学の本は面白かった．自然科図書室で自由に見ることができた専門雑誌に *Journal of mathematical physics* があり，そこに載っていたダイソンのランダム行列の論文などを見て，数理物理を勉強してみたいと思うようになった．

数学は自由であると岡本和夫さん[3)]が書いているが，物理には気楽さを感じた．いちいちこれは定理であるとか言わないでも済むのである．最近，ポリアコフのインタビューを読むことがあったが，ポリアコフもランダウの量子力学の教科書を読んで，小鳥のように自由になったと言っている．もっとも，16歳のときに読んだそうであるが．大学院は駒場の阿部龍蔵先生の研究室で相転移を研究した．当時の統計力学の2つの主要テーマはオンサガーのイジング模型の厳密解とBCS超伝導理論であった．磁場がある場合のイジング模型が解けないかとか，分配関数の零点分布などを考えていたが成果が出ず修士のときは苦闘していた．前者の問題は未だに解けていない．相転移のランダウ理論は完璧で何にでも適用できるすばらしい理論であった．ポリアコフはあるインタビューで「理論物理とは何か」と聞かれて，「どの部屋でも開けられるマスターキーを捜すことだ」と述べている．ランダウ理論はまさにマスターキーであった．しかし当時，問題になり始めていた相転移点での臨界現象に関しては，平均場近似のランダウ・ギンツブルグ的扱いでは説明できないことがわかってきた．1972年のウイルソンの繰り込み群で初めて満足のいく説明が得られた．大学院の博士課程の頃である．アメリカでのカダノフやウイルソンの理論と同時にソ連でもランダウスクールで研究されていて，ラーキンとその学生のクメルニツキーによる理論，ミグダル（子供のほう）とポリアコフの理論も展開されていた．その頃は，この繰り込み群を研究していたのは，阿部研を含め世界でもほんの数グループであった．1970年代というのは，理論物理が大発展した時代である．繰り込み群理論の他にもQCD理論などその後を決定する新しい概念が導入できた時代で，この時期に物理を勉強できたのは幸運であった．当時の日本の理論物理は湯川・朝永のおかげでレベルが高かった．院生のとき，湯川さんが駒場にセミナーにこられ

て，話を聞いたことがあった．

3. 朝永さんの面接

この湯川さんの京都大学基礎物理学研究所の助手に1975年に着任したが，当時の所員は4部門12人と少なく，いろいろ議論したり，教わったりして楽しかった．一緒に論文を書いたこともあった．小林誠さんや益川敏英さんが京大の助手の頃である．所長だった牧二郎さんからは朝永さんの宴会のかくし芸などを教わった．仁科財団に海外派遣研究員制度というのがあり，京都大学の基礎物理学研究所の助手となって数年してから，応募することになった．通常毎年2名採用されるらしいが，この年は3名採用された．おまけとして1名，採用されたのではないかと思っている．とにかく幸運にも外国に奨学金を持って自由に行けることになった．面接試験で巣鴨の仁科財団を訪ねると，面接して下さる人は驚いたことに朝永さんともう一人同年輩の方の2人であった．応募した研究テーマは繰り込み群による相転移臨界現象の研究であった．高校以来の間近に見る朝永さんで，映画をみるような気持ちで，ただただ緊張して座っていた．行き先はアメリカのハーバード大学にしておいたが，朝永さんは，「こういう数学的な研究はヨーロッパが良いでしょう．アメリカにはすごい秀才がいますから」とにこにこして一言言われたので驚かされた．この一言が私の場合の最重要の物理の道しるべとなった．「こういう数学的な…」と言われたのは，少々意外であった．どこにも数学的な匂いもしていなかったからである．しかし，その後のこの研究分野の発展は，後述するように非常に数学的になっていくのである．

このすごい秀才の言葉が何を意味するのかは，実際にハーバードに行ってみて納得するのだが，さすが朝永さんで，判断は的確であった．朝永さんに言われたので，方針を変えてまずフランスのサックレー原子核研究所の繰り込み群を研究しているブレザンさんやジンジャスタンさんの所に行って研鑽を積むことにした．このブレザンさんのグループの研究により，行ったときには4次元からの展開による臨界現象の研究はほとんど終わっていた．臨界指数の理論的計算結果は観測される実験値の精度を超えていた．ブレザンさんから与えてもらった問題は非線形シグマ模型の2次元近くでの3ループの繰り込み群の計算で，トフーフトの次元解析方法に基づくものであった．ループというのはファイマン図形に出てくる輪のことで，輪の数が摂動展開の次数に相当する．1ループ，2ループはできて普通であるが，3ループの計算は大変な量の計算になる．ファイマン図形を描くだけでノート2，3ページにもなるが，昼夜計算した．計算のどこかに見落としや，写し間違いがあり，それを見つけるのも大変であった．朝永さんの欧州滞在記で計算がうまくいかずめげている描写を思い出しては，計算していた．一月半ぐらいで，計算の間違いも見つかり，答えも予想していたようにうまく収れんし，ブレザンさんに告げたら喜んでもらえた．また，それを聞いたイツキソンさんにも大変褒めてもらえた．

このイツキソンさんは何でもたちどころに理解できる人で，このサックレーのリーダーの一人であった．若い人を勇気付けてくれる貴重な存在だった．実際，サックレーではその後優れた若手の研究者がイツキソンの影響で輩出した．この計算の間に，BIPZと呼ばれるブレザン，イツキソン，パリジ，ズバーの4人によるランダム行列模型の論文ができ上がり，その後の2次元量子重力理論の行列模型の出発点となる重要な仕事が行われた．トフーフトはアルプスでの夏の学校に生徒として参加し，ベンジャミン・リーの講義を聴いてファイマン図形のパラメター N が大きい極限でのゲージ理論を思いついたそうであるが，BIPZの研究の動機はこのトフーフト理論を調べるためだった．その頃まだ若いウイッテンが来てセミナーを行った．聞き終わったドクロワゾーは「一言も言い間違わなかった」と驚嘆して私に告げた．

摂動計算の3ループの結果は4次元からの摂動とは異なり，摂動の次数ごとの正負の符号が交互になっていないことが判明した．摂動計算は漸近展開なので，大きな次数の振舞いを調べることが

重要となり，非摂動的振舞いを与えるインスタントン効果の研究が必要になる．そこで，次に，N の逆数展開による高次摂動の様子を見る研究に移り，解ける模型で計算してこのインスタントンを研究した．50 次ぐらいまで計算機で計算し，理論と合うかどうかも確かめた．結局，サックレーに居たときは，論文はこの 2 つを書いただけである．最近ではポスドクは一年間に 6 つ論文を書かないと職を見つけられないと聞かされるが，昔は良かったのである．後にこの 3 ループの計算が中性子散乱による La_2CuO_4 のスピン相関の実験解析に使われるようになったのを知って驚かされた．サックレーではいろいろなセミナーがあり面白かったが，時には当時人権（ヒューマンライト）問題となっていたサハロフなどのロシアでの自由の剥奪が議論された．物理屋どうしの連帯意識が強いのを感じた．特にサハロフはランダウスクールと近く（ラーキンはサハロフの学生であった），身近の問題だったのである．

4. レプリカ法

サックレーにいた最後に，夏の学校が ill condensed matter という題目で 4 週間，アルプスで開かれ，アンダーソンらが講師となって来た．生徒はドクターをとったばかりの人で，各国から来ていて楽しかった．ときどき，この生徒仲間に会議などで会うが，いまでも会うのを楽しみにしている．今ではだれもが恩恵をこうむっている arXiv を作った Paul Ginzparg も仲間であった．この夏の学校の主題の無秩序系の問題が，これをきっかけに今に至るまでの研究テーマとなるのであるから，この夏の学校も重要な道しるべとなった．この夏の学校で，アンダーソンはレプリカ法というテクニックが無秩序系の問題で鍵であり，このレプリカ法は数学の中で一番美しい定理であると述べていた．レプリカ法とは前出の N が零に行った極限を使う方法である[4]．

一年間ヨーロッパにいたので，朝永さんの一言に対しても責任を果たせたと思ったので，次に「すごい秀才がいる」という検証をすべくハーバードに行った．動的臨界現象を研究していた物性論のハルペリンの所に行ったのだが，同じフロアーには，ワインバーグ，グラショウ，コールマン，グラウバーなどがいて活気があった．ポスドクにも前出のウイッテンやペシュキンらがいた．このハーバードでは計算していた非線形シグマ模型をゲージ不変にした $CP(N-1)$ 模型の繰り込み群の 3 ループ計算をすることにした．これは，朝永さんの量子電磁気学（QED）と関連したスカラー QED 模型と等価であるが，フランスでの計算以上に複雑になった．結局これも 2 カ月近く朝から晩まで計算していた．計算が終わったときに，ウイッテンに $CP(N-1)$ 模型の計算をしていると言ったら，コールマンに相談したら良いと助言された．しかし，コールマンは日中には居なく，夜になってからでないと来ないので，結局話す機会はなかった．ハーバードには半年いて，帰国することにしたが，サックレーに寄ってさらにゲージ対称性が高いグラスマン多様体の非線形シグマ模型の繰り込み群の計算をブレザン，ジンジャスタンさんと行った．この結果の式でレプリカ極限をとったものがアンダーソン局在の繰り込み理論による解になるのである．ようやく，物理に応用が利くようになってきて，無秩序系の問題の一つである，電子局在の問題への道筋がはっきりしてきた．一方，グラスマン多様体などが出てきて，理論が数学的になってきた．朝永さんの一言のとおりである．1979 年頃のことである．その後，一年ほどして，アメリカのベル研究所でセミナーをする機会があり，セミナーの後アンダーソンに呼ばれて，彼の部屋の小さい黒板を使って，この理論を説明した．アルプスの夏の学校から 2 年も経っていなかったと思うが，夏の学校で息抜きとしてアンダーソンに卓球の相手をさせられてから，短期間で答えを告げることができたのはうれしかった．アンダーソンも彼のレプリカ法を使った解であるので，すぐに理解してくれた[4]．

5. ランダム行列

その後，アンダーソン局在や量子ホール効果な



写真１　ラーキンさんと.



写真２　ランダウ研究所.

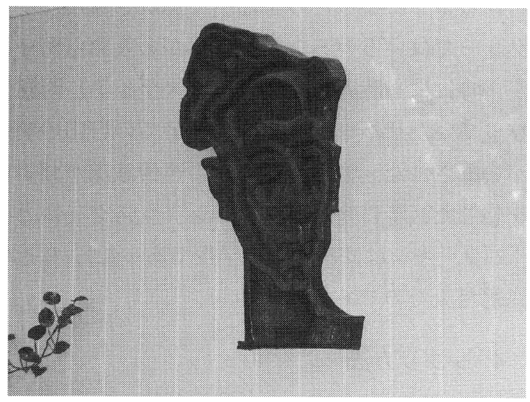


写真３

どでの無秩序系の問題での進展や，1987 年の高温超伝導発見などがあるが，書くと長くなるので省略することにする．1988 年頃からソ連の体制が崩壊し出し，その時期にランダウ研究所を訪問することができたので，その話に移ることにする．ラーキンさんが呼んでくれたもので，物理を学ぶきっかけとなったランダウの研究所を訪ねられるのは非常にうれしかった．ランダウ研究所はモスクワのカピッツァ研究所に同居した支部があるのと，その他に，チェルノゴロフカというモスクワ郊外の村にその本部があり，そこに日本人として初めて行くことができた．モスクワのランダウ研究所はランダウが住んでいた住居と続きになっていて，京都大学基礎物理学研究所（湯川ホール）に良く似ていた．アブリコソフを初め有名な人がセミナーに出ていた．すぐ隣に小さな公園があり，そこで色々な物理の議論が行われていたようである．チェルノゴロフカでは初めての日本人なので手続きが大変であったと後で聞かされた．小さい村で，研究所は小さく（写真２参照），森の中に黒板を持ち出し，議論していたようである．数年前に再度ここをラーキン記念会議の際訪問したとき，まだ若いポリアコフらがラーキンと森の中で黒板を前に議論していた写真が紹介された．写真３はこの研究所を入ったところに掲げられてあるランダウのレリーフである．

1990 年頃に前述の BIPZ のマトリックス模型が可解模型として量子重力を記述するものであることが判明し，さらにウイッテンによるトポロジカルな場の理論が作られ，双対性やミラー対称性が見出されて，理論物理は代数幾何やトポロジー数学と明確に関連するようになった．小平理論と弦理論の関係が議論され出したのである．技術革新も進み，メソ領域やナノ領域の素子も簡単に作れるようになり，何の役に立つかと言われていたダイソンのランダム行列理論もこのような素子の解析にはなくてはならぬものになった．また，このような微小領域では電子のビリヤードが作れ，量子カオス状態を調べられるようになった．これはリーマンゼータ関数の零点分布とも関連するが，ランダム行列理論が重要な中心理論になった．数

年前にこの分野の研究者たちと会った際，志村五郎さんの論文を応用しようとしている人がいて驚かされた．志村さんや小平さんの道は典型的な数学の道であるが，物理の道とどこかで交わっているようで不思議なことである．ブレザンさんとここ 10 年以上行ってきたランダム行列理論は最近になって代数幾何でのモジュライ空間のスピン曲線の交叉数を与えるものであることが判明し，さらにレプリカ法と $N = 2$ の超対称理論との関係もはっきりし出した[5]．子供の頃熱中した紙の独楽が回転しながら描く曲線に関係しているのは何とも言えない不思議なことで物理はわからないものである．

6. 物理の道の先

物理の道の先には何があるのか良くわからない．朝永さんによれば，「理論物理屋が歳をとると，政治に興味をもつか，歴史に興味を持つかの二つに分かれる」そうである．これは，直接聞いたのではなく，牧さんからの又聞きである．朝永さんの弟子である牧さんは歳をとられてから科学史に興味をもたれたので，この朝永さんの一言に従ったのかもしれない．最初に，この一言を牧さんから聞いたとき，笑って聞いたものであるが，良く当たっているのである．実際，理論物理屋で文部大臣になったり，国会議員になったりした人がいるのは有名である．最初は面白がっていたこの朝永さんの一言も，実は深い意味があるのではないかと最近気がついた．それは，物理学者の社会的責任についてである．政治も歴史の検証もどちらも社会との関わりである．物理は数学と違って定義して始まる学問ではなく，社会の発展に伴って変化する学問である．もう少し正確に言えば，実験に伴って進展するものである．物理を研究している人は社会に対して正しく物理を説明し，提案をしなければいけないのである．政治家にならないまでも人権問題やエネルギー問題では議論したり意見を表明することが必要なのであろう．また物理屋は寄席に通って話術を磨き，次世代の人のために高校の文化祭や教養の授業でそれを披露しなければいけないのである．物理は数学同様，自由であるが，数学とは異なりこの社会的責任を果たすことで“つぶし”を利かせられる学問であるようだ．

[後記]　蛇足ながら，『物理学とは何だろうか』はだれも読み終わることはできない．朝永さんの未完の遺作であるからである．

参考文献

1) 朝永振一郎『物理学とは何だろうか』朝永振一郎著作集 7，解説　伊藤大介，みすず書房．
2) 志村五郎『記憶の切繪図』筑摩書房．
3) 岡本和夫『数学者は城の中？』H.M. エンツェンスベルガー，渡辺正訳，日本評論社．
4) Phill. W. Anderson, *Physics Today* June 1988, 9.
5) E. Brezin and S. Hikami, Intersection theory from duality and replica, *Commun. Math. Physics* **283** (2008) 507.

（ひかみ・しのぶ，東京大学大学院総合文化研究科）

特　集（2009年6月号予告）

現象と物理概念を結ぶ方程式

本体952円

編集後記

今回の特集は如何でしたでしょうか．

高校，大学ととにかく慣れ親しんだ微積分ですが，とても多くの分野に使われているのだなあ，と改めて感じました．

ところで，この春大学生となった人にとって，微積分といえば，どういったものが想起されるでしょうか．たくさんの計算ももちろん出てきますが，そこには今回の特集にあるように論理的思考をフルに使う，多くの証明が出てきます．

この数学特有の世界は慣れてしまうと非常に面白く，ひょっとしたら，他の何物にも変えられないものになるかもしれませんから，決していやがらずに楽しんでいってほしいと思います．　(R)

数　理　科　学　5月号

2009年5月1日発行

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

発行人　木下敏孝

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　ⓒ　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1-3-25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁